

SZACOWANIE WSPÓLCZYNNIKA FILTRACJI W KOLUMNIE FILTRACYJNEJ

Jadwiga ŚWIRSKA
Politechnika Opolska, Opole

1. Sformułowanie problemu

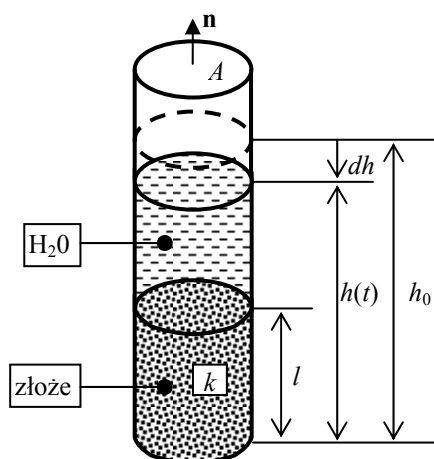
Wyjściowym punktem rozważań jest tu całkowity bilans masy dla płynu o gęstości ρ przepływającego przez złożę o przekroju A z prędkością $\bar{\mathbf{v}}$ [1]

$$\frac{dm}{dt} = - \int_A \rho \bar{\mathbf{v}} \mathbf{n} dA, \quad (1)$$

z którego po uwzględnieniu związku $\bar{\mathbf{v}} \mathbf{n} = \bar{v}_z$ otrzymana się relację

$$\frac{dm}{dt} = -\rho \bar{v}_z A \quad \Rightarrow \quad dm = -\rho \bar{v}_z A dt, \quad (2)$$

gdzie $dm = \rho A dh$ – masa cieczy przefiltrowanej przez złożę w czasie dt .



Rys. 1 Schemat kolumny filtracyjnej.
Fig. 1 Schema of filtration column.

Do równania (2) dołączyć należy prawo Darcy'ego opisujące gęstość strumienia cieczy j_z przepływającej przez złożę, które w analizowanym przypadku można zapisać w postaci [2]

$$j_z = \rho \bar{v}_z = -k \frac{dp}{dz} = -k \frac{\rho g h(t)}{l}, \quad (3)$$

gdzie $p = \rho g h(t)$ – ciśnienie hydrostatyczne cieczy.

Podstawiając relację (3) do równania (2) otrzymuje się zależność

$$\rho A dh = -k \frac{\rho g h(t)}{l} A dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{h(t)} = -k g \frac{dt}{l}, \quad (4)$$

którą należy scałkować w poniższy sposób [2]

$$\int_{h_0}^h \frac{dh}{h(t)} = -k \frac{g}{l} \int_{t_0}^t dt, \quad (5)$$

gdzie h_0 jest początkową (w chwili t_0), a h aktualną (w chwili t) wysokością słupa cieczy. Postępując w powyższy sposób uzyska się następującą zależność na współczynnik filtracji k złoża

$$k = \frac{l}{g \Delta t} \ln \left(\frac{h_0}{h(t)} \right), \quad \Delta t = t - t_0. \quad (6)$$

2. Współczynnik filtracji jako zmienna losowa

W dalszej części rozważań założono, że w równaniu (6) wielkość $h(t)$ jest wielkością losową tzn. $h(t, e)$ i że w celu wyznaczenia współczynnika k wykonano n prób.

Na podstawie tych pomiarów można wyznaczyć funkcje gęstości prawdopodobieństwa $f_h(h, t)$ wielkości h spełniające zależność [3]

$$P_h(t)[h_1 \leq h \leq h_2] = \int_{h_1}^{h_2} f_h(h, t) dh, \quad (7)$$

gdzie czas t występuje jako parametr, oraz dystrybuanty

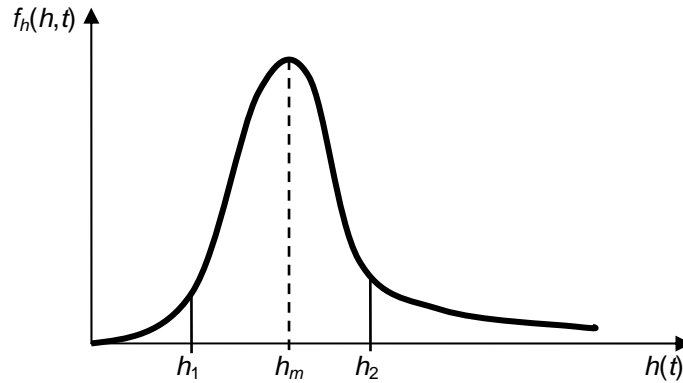
$$F_h(h_1, t) = P_h[h \leq h_1] = \int_{-\infty}^{h_1} f_h(h, t) dh. \quad (8)$$

Wartość oczekiwaną czy też wartość średnią wysokości słupa wody $h(t)$ w danej chwili t można wówczas obliczyć ze wzoru

$$h_m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h f_h(h, t) dh, \quad (9)$$

lub też odrzucając wyniki skrajne i ograniczając się do wyników, których prawdopodobieństwo wystąpienia wynosi np. 0,9, z zależności

$$h_m(t) = \int_{h_1}^{h_2} h f_h(h, t) dh, \quad (10)$$



Rys. 2 Przykładowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa wielkości h .
Fig. 2 Example function of density probability of volume h .

Natomiast odchylenie standardowe można policzyć odpowiednio ze wzorów

$$\sigma_h(t) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (h - \bar{h}(t))^2 f(h, t) dh \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{lub} \quad \sigma_h(t) = \left[\int_{h_1}^{h_2} (h - \bar{h}(t))^2 f(h, t) dh \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Ponieważ zgodnie z relacją (6) współczynnik filtracji k jest zmienną losową zależną od zmiennej losowej $h(t, e)$, to funkcje gęstości prawdopodobieństwa $f_k(k, t)$ można wyznaczyć ze związku

$$f_k(k, t) = \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{h(k, t)} f_h(h, t) dh, \quad (12)$$

gdzie funkcję $h(k, t)$ uzyskać można z przekształcenia wyrażenia (6)

$$h(k, t) = h_0 \exp\left(-\frac{g \Delta t}{l} k\right). \quad (13)$$

3. Badania eksperymentalne

W praktyce laboratoryjnej, zamiast mierzyć poziom wody w kolumnie filtracyjnej w pewnych określonych chwilach t_k procesu, rejestruje się czas, w którym słupek wody osiąga pewne określone wysokości h_k . Uzyskane z tych pomiarów gęstości prawdopodobieństwa muszą spełniać zależności

$$P_i(h)[t_1 \leq t \leq t_2] = \int_{t_1}^{t_2} f_i(t, h) dt. \quad (14)$$

Pozostałe wielkości oblicza się analogicznie jak poprzednio.

Poniżej przedstawione zostaną wyniki badań eksperymentalnych współczynnika filtracji wody o temperaturze 10°C przez spiek szklany, przeprowadzone w kolumnie filtracyjnej przy zmiennej wysokości słupa wody. W celu wyznaczenia współczynnika k wykonano 7 pomiarów. Wyniki badań zestawione zostały w tabelicy 1. W tabelicy 2 zamieszczono średnie czasy, w których słup wody osiągał wybrane wysokości h_k oraz wariancje i odchylenia standardowe odpowiadające tym wysokościami.

Tablica 1. Wyniki pomiarów.

Wysokość h [m]	Czas t [s] próba						
	1	2	3	7	5	6	7
0,70	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,60	1,54	1,44	1,40	1,47	1,38	1,53	1,44
0,50	3,28	3,29	3,16	3,29	3,00	3,57	3,21
0,40	5,26	5,34	5,34	5,37	5,26	5,68	5,39
0,30	7,69	7,73	7,74	7,78	7,73	8,13	7,91
0,20	10,98	11,13	11,07	11,10	11,00	11,26	11,24
0,10	15,69	15,90	15,84	15,83	15,79	15,98	15,72

Tablica 2. Średnie czasy, wariancje i odchylenia standardowe.

Wysokość h [m]	Wartość średnia t_m [s]	Wariancja σ^2 [s ²]	Odchylenie standardowe σ [s]
0,70	0,000	0,00000	0,00000
0,60	1,457	0,00369	0,06075
0,50	3,257	0,02972	0,17241
0,40	5,377	0,02036	0,14268
0,30	7,816	0,02420	0,15555
0,20	11,111	0,01175	0,10839
0,10	15,821	0,01005	0,10024

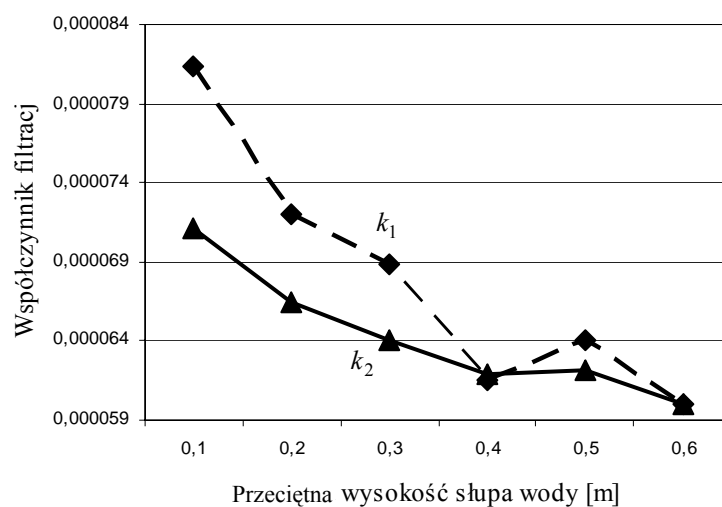
Przyjmując, że zmienne losowe $t_k(h_k, e)$ są zmiennymi o rozkładzie normalnym ich funkcje gęstości prawdopodobieństwa można opisać wzorami [3]

$$f_{tk} = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(t - t_{mk})^2}{2\sigma_k^2} \right], \quad (15)$$

W tabeli poniżej zestawiono współczynniki filtracji spieku szklanego obliczone dla średnich czasów t_m zgodnie ze wzorem (6), najpierw przy założeniu, że dla każdej wysokości słupa wody h_k wysokość początkowa h_0 równa jest h_{k+1} (k_1), a następnie przy założeniu, że wysokość początkowa h_0 jest stała i równa 0,7 m (k_2).

Tablica 3. Współczynniki filtracji spieku szklanego.

$h(t)$ [m]	t_m [s]	$h_0(t)$ [m]	k_1 [kg/msPa]	h_0 [m]	k_2 [kg/msPa]
0,7	0,00	0,7	-	0,7	-
0,6	1,45	0,7	5,42E-05	0,7	5,42E-05
0,5	3,26	0,6	5,13E-05	0,7	5,26E-05
0,4	5,38	0,5	5,36E-05	0,7	5,30E-05
0,3	7,81	0,4	6,03E-05	0,7	5,53E-05
0,2	11,11	0,3	6,26E-05	0,7	5,75E-05
0,1	15,82	0,2	7,50E-05	0,7	6,27E-05



Rys. 3. Zależność współczynnika filtracji od wysokości słupa wody: przy h_0 stałym – linia ciągła, przy h_0 zmiennym – linia przerywana.
Fig. 3 Dependence of filtration coefficient from height of column water: at constant h_0 – solid line, at changing h_0 – dashed line.

4. Uwagi końcowe

Z danych zestawionych w tabelicy 3 oraz z rysunku 3 wynika, że współczynnik filtracji spieku szklanego nie jest wielkością stałą, lecz zmienia się wraz z wysokością słupa cieczy w kolumnie filtracyjnej czyli wraz z ciśnieniem hydrostatycznym. Przy czym zmienność ta jest bardziej widoczna w przypadku współczynnika k_1 obliczanego przy założeniu, że wysokość początkowa dla danej chwili $t_k(h_k)$ równa jest wysokości h_{k-1} . Przypadek ten odpowiada założeniu mniejszego obszaru uśredniania, któremu odpowiada dana wartość $k_{1k}(\langle h_k, h_{k-1} \rangle)$ niż to się dzieje w przypadku współczynnika $k_{2k}(\langle h_k, h_0 \rangle)$.

Oznaczenia symboli

- A – pole powierzchni próbki, field of the surface of a specimen, [m²],
- e – zdarzenie elementarne, elementary event,
- h – wysokość aktualna słupa cieczy, initial height of liquid column, [m],
- g – przyspieszenie ziemskie, acceleration of gravity, [m/s²],
- j_z – filtracyjny strumień masy, filtrational flux of mass, [kg/(m² s)],
- k – współczynnik filtracji, filtration coefficient, [kg/(m s Pa)],
- l – wysokość próbki, height of sample, [m],
- m – masa, mass, [kg],
- \mathbf{n} – wektor normalny, normal vector, [-],
- p – ciśnienie hydrostatyczne cieczy, hydrostatical pressure of liquid, [Pa],
- P – prawdopodobieństwo, probability,
- f – funkcja prędkości prawdopodobieństwa, function of density probability,
- $\bar{\mathbf{v}}$ – wektor prędkości średniej, vector of mean velocity, [m/s],
- ρ – gęstość, density, [kg/m³],
- σ^2 – wariancja, variantion,
- σ – odchylenie standardowe, standard deviation.

Literatura

- [1] Kubik J.: Przepływ wilgoci w materiałach budowlanych, OW PO, Opole, 2000.
- [2] Kubik J., Świrski J.: Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki budowli, Skrypt nr 275, OW PO, Opole, 2005.
- [3] Poradnik inżyniera - Matematyka, Praca zbiorowa pod redakcją T. Trajdosy i P. Kucharczyka, WNT, Warszawa, 1997.

ESTIMATION OF FILTRATION COEFFICIENT IN FILTRATION COLUMN

Summary

In this paper the expression on filtration coefficient at variable level of water in column is obtained. Subsequently on found that height of water column is independent random variable and one posed expressions on function of density probability of volume h , function of distribution, expecting value and standard deviation. At the end testing of filtration coefficient of glass sinter in filtration column at variable height of water column is described.