ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 7/2007
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ROZWIĄZANIE FUNDAMENTALNE ZAGADNIENIA QUASI-STATYCZNEGO STACJONARNEJ TERMODYFUZJI W OŚRODKU SPRĘŻYSTYM O WŁAŚCIWOŚCIACH MIKROPOLARNYCH

Barbara WIECZOREK
Politechnika Śląska, Gliwice

1. Wprowadzenie

Zagadnienie quasi-statyczne sprzężonej termodyfuzji sprężystej w ośrodku o właściwościach mikropolarnych opisane jest układem ośmiu równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu, określających charakter wzajemnego oddziaływania pola cieplnego i dyfuzyjnego oraz pola naprężeń.

Istnieją równoważne sformułowania opisu przepływów termodyfuzyjnych w ośrodku, które wynikają z różnych potencjałów termodynamicznych procesu (por. [2, 4]). Postać układu równań dla ośrodka sprężystego centrosymetrycznego wyprowadzona w oparciu o potencjał energii swobodnej, jest następująca:

$$
\begin{gathered}
-(\mu+\alpha)\,u_{i,jj}-(\lambda+\mu-\alpha)\,u_{j,ji}-2\alpha\in_{ijk}\varphi_{k,j}+\phi\,T_{,i}+\psi\,C_{,i}=\rho X_i\\
-(\gamma+\varepsilon)\,\varphi_{i,jj}-(\gamma+\beta-\varepsilon)\,\varphi_{j,ji}+4\alpha\,\varphi_i-2\alpha\in_{ijk}u_{k,j}+\overline{\phi}\,T_{,i}+\overline{\psi}\,C_{,i}=\rho Y_i\\
T_o\frac{\partial}{\partial t}\left[\phi\,u_{j,j}+\overline{\phi}\,\varphi_{j,j}+\mathrm{m}\,T+\mathrm{l}\,C\right]-k_1\,T_{,ii}=\rho R_1\\
\dot{C}-k_2\left[\psi\,u_{j,j}+\overline{\psi}\,\varphi_{j,j}+\mathrm{l}\,T+\mathrm{n}\,C\right]_{,ii}=\rho R_2
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Na układ równań (1) składają się trzy równania ruchu w przemieszczeniach i trzy równania ruchu w obrotach oraz równanie przewodnictwa cieplnego i równanie dyfuzji.

Poszukiwanymi wielkościami w tym zadaniu są odpowiednio: temperatura θ, koncentracja C oraz pole przemieszczeń u_i i obrotów φ_i.

W pracy poszukuje się rozwiązania układu równań ujmującego sprzężone, ale stacjonarne przepływy ciepła i dyfundującej masy w ciele sprężystym. Poszukuje się rozwiązania układu równań opisujących proces termodyfuzji z udziałem określonego pola temperatur T, co oznacza, że pola naprężeń i przemieszczeń są sprzężone z przepływami masy, zaś pole temperatury wyznacza się z klasycznego równania Fouriera.

Postać układu równań w tym przypadku jest następująca:

$$
\begin{gathered}
-(\mu+\alpha)u_{i,jj}-(\lambda+\mu-\alpha)u_{j,ji}-2\alpha\in_{ijk}\varphi_{k,j}+\phi\,T_{,i}+\psi\,C_{,i}=\rho X_i\\
-(\gamma+\varepsilon)\varphi_{i,jj}-(\gamma+\beta-\varepsilon)\varphi_{j,ji}+4\alpha\,\varphi_i-2\alpha\in_{ijk}u_{k,j}+\overline{\phi}\,T_{,i}+\overline{\psi}\,C_{,i}=\rho Y_i\\
-k_1\,T_{,ii}=\rho R_1\\
-k_2\left[\psi\,u_{j,j}+\overline{\psi}\,\varphi_{j,j}+1T+\mathrm{n}\,C\right]_{,ii}=\rho R_2
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Przy wyznaczaniu rozwiązania fundamentalnego układu (2) stosowana będzie transformacja Fouriera, która dla dowolnej funkcji $f(x_i,t)$ określonej w przestrzeni $\Re^4$ zdefiniowana jest wzorem:

$$
\mathsf{F}\left[f(x_i,t)\right]=\hat{f}(s_i,\omega)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\Re^4}f(x_i,t)\,\mathrm{e}^{-i(x_i s_i+t\,\omega)}dx_i dt \tag{3}
$$

gdzie $s=(s_1,s_2,s_3)$, a powtarzające się indeksy oznaczają sumowanie od 1 do 3.

Transformatę odwrotną określa wyrażenie

$$
f(x_i,t)\cong\mathsf{F}^{-1}\left[\hat{f}(s_i,\omega)\right]=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\Re^4}\hat{f}(s_i,\omega)\,\mathrm{e}^{i(x_i s_i+t\,\omega)}ds_i\,d\omega \tag{4}
$$

Zdefiniowane przekształcenie ma następujące właściwości:

$$
\mathsf{F}\left[\partial_k f(x_i,t)\right]=is_k\,\hat{f}(s_i,\omega),\qquad \mathsf{F}\left[\partial_t f(x_i,t)\right]=i\omega_k\,\hat{f}(s_i,\omega) \tag{5}
$$

$$
\mathsf{F}\left[f(x_i,t)*g(x_i,t)\right]=(2\pi)^2\,\hat{f}(s_i,\omega)\,\hat{g}(s_i,\omega) \tag{6}
$$

Wykorzystane zostaną również następujące relacje

$$
\mathsf{F}\left[\delta(t)\,|x|\right]=\frac{-2}{\pi s^4},\ \mathsf{F}\left[\frac{\delta(t)}{|x|}\right]=\frac{1}{\pi s^2},\ \mathsf{F}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{d}|x|}\,\delta(t)\right]=\frac{1}{4\pi^2}\frac{2\mathrm{d}}{s^2+\mathrm{d}^2},\ |x|=\sqrt{(x_i x_i)} \tag{7}
$$

2. Rozwiązanie fundamentalne

Różniczkując pierwsze dwa równania w układzie (2) i wprowadzając dylatację przemieszczania i obrotu

$$
e\cong u_{i,i},\quad d\cong\varphi_{i,i} \tag{8}
$$

otrzymuje się układ czterech równań różniczkowych:

$$
\begin{gathered}
-(\lambda+2\mu)e_{,ii}+\phi\,T_{,ii}+\psi\,C_{,ii}=\rho X_{i,i}\\
-(\beta+2\gamma)d_{,ii}+4\alpha\,d+\overline{\phi}\,T_{,ii}+\overline{\psi}\,C_{,ii}=\rho Y_{i,i}\\
-k_1\,T_{,ii}=\rho R_1\\
-k_2\left[\psi\,e+\overline{\psi}\,d+1T+\mathrm{n}\,C\right]_{,ii}=\rho R_2
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Rozważany układ (9) można zapisać w postaci macierzowej:

$$
\mathbf{A}(\partial_i,\partial_t)\mathbf{y}=\mathbf{f} \tag{10}
$$

gdzie:

$$(\boldsymbol{y})^T = [\, e\,, d\,, T\,, C\,], \qquad (\mathbf{f})^{\mathrm{T}} = [\,\rho X_{i,i}\,, \rho Y_{i,i}\,, \rho R_1\,, \rho R_2\,] \tag{11}$$

przy czym macierz układu jest określona następująco:

$$\boldsymbol{A}(\partial_i, \partial_t) = \begin{bmatrix} -(\lambda + 2\mu)\partial_{ii} & 0 & \phi\,\partial_{ii} & \psi\,\partial_{ii} \\ 0 & -(\beta + 2\gamma)\partial_{ii} & \bar{\phi}\,\partial_{ii} & \bar{\psi}\,\partial_{ii} \\ 0 & 0 & -k_1\,\psi\,\partial_{ii} & 0 \\ -k_2\,\psi\,\partial_{ii} & -k_2\,\psi\,\partial_{ii} & -k_2\,l\,\partial_{ii} & -k_2\,n\,\partial_{ii} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Dla zagadnienia opisanego układem równań różniczkowych (10) wyznacza się rozwiązanie podstawowe operatora termodyfuzji (por.[1, 5]) poszukując dystrybucji $\boldsymbol{E}$ spełniającej równanie

$$\boldsymbol{A}(\partial_i, \partial_t)\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\delta}, \qquad \text{gdzie:} \qquad \delta = \boldsymbol{I}\,\delta(x)\delta(t) \tag{13}$$

Rozwiązanie układu (13) sprowadza się do wyznaczenia macierzy niezależnych dystrybucji temperowanych $\boldsymbol{E}$.

Po wykonaniu transformacji Fouriera równań układu (13) zgodnie ze wzorem (3) otrzymuje się układ równań:

$$\hat{\boldsymbol{A}}(s_i, \omega)\,\hat{\boldsymbol{E}}(s_i, \omega) = (2\pi)^{-2}\,\boldsymbol{I} \tag{14}$$

który są układem równań algebraicznych, a macierz $\boldsymbol{I}$ jest macierzą jednostkową. Macierz układu (14) jest określona następująco:

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)s^2 & 0 & -\phi\,s^2 & -\psi\,s^2 \\ 0 & (\beta + 2\gamma)s^2 & -\bar{\phi}\,s^2 & -\bar{\psi}\,s^2 \\ 0 & 0 & \hat{n}^{(1)}\,i\omega\,s^2 & 0 \\ k_2\,\psi\,s^2 & k_2\,\bar{\psi}\,s^2 & k_2\,n\,s^2 & k_2\,n\,s^2 \end{bmatrix} \text{ przy czym } s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\,. \tag{15}$$

Rozwiązaniem układu (14) jest macierz $\hat{\boldsymbol{E}}$, której elementy przyjmują postać:

$$\hat{E}_{ij} = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{1}{\mathsf{A}}\;\frac{\xi_{ij}s^2 + \eta_{ij}}{s^2(s^2 + \mathsf{B}^2)} = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{1}{\mathsf{A}}\left(\frac{\mathsf{C}_{ij}}{s^2} + \frac{\mathsf{D}_{ij}}{s^2 + \mathsf{B}^2}\right) \tag{16}$$

gdzie:

$$\xi_{ij} = \begin{bmatrix} k_1\,k_2(\psi + n\,w) & -k_1\,k_2\,\psi\,\bar{\psi} & k_2\left(\phi\,\bar{\psi} - \bar{\phi}\psi\,\bar{\psi} - (l\,\psi - n\,\phi)\,w\right) & k_1\,l\,\psi\,w \\ -k_1\,k_2\,\psi\,\bar{\psi} & k_1\,k_2\left(\psi^2 + n\,z\right) & k_2\left(\psi^2 w + \bar{\psi}^2 z + n\,z\,w\right) & k_1\,\bar{\psi}\,z \\ 0 & 0 & k_2\left(\bar{\phi}\,\psi^2 - \phi\psi\,\bar{\psi} - (l\,\bar{\psi} - n\,\bar{\phi})\,z\right) & 0 \\ -k_1\,k_2\,\psi\,w & -k_1\,k_2\,\bar{\psi}\,z & -k_2\left(\phi\,\psi\,w + \bar{\phi}\bar{\psi}\,z + l\,z\,w\right) & k_1\,z\,w \end{bmatrix}$$

$$\eta_{ij} = \begin{bmatrix} 4\alpha\,k_1\,k_2\,n & 0 & 4\,\alpha\,k_2(n\phi - l\,\psi) & 4\,\alpha\,k_1\psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\,\alpha\,k_2(\psi^2 + n\,z) & 0 \\ -4\alpha\,k_1\,k_2\,\psi & 0 & -4\,\alpha\,k_2(\phi\,\psi + l\,z) & 4\alpha\,k_1\,z \end{bmatrix}$$

oraz

$$z = (\lambda + 2\mu), \quad w = (\beta + 2\gamma)$$

$$A = k_1\, k_2 \left(\psi^2(\beta + 2\gamma) + \overline{\psi}^{\,2}(\lambda + 2\mu) + n(\lambda + 2\mu)(\beta + 2\gamma)\right)$$

$$B = \sqrt{\frac{4\,\alpha\left(\psi^2 + n\,(\lambda + 2\mu)\right)}{A}}, \quad C_{ij} = \frac{\eta_{ij}}{B}, \quad D_{ij} = \xi_{ij} - \frac{\eta_{ij}}{B}$$

Określona wzorem (16) macierz rozwiązań podstawowych zawiera 16 niezależnych dystrybucji i może posłużyć do wyznaczenia rozwiązania źródłowych zagadnień stacjonarnej termodyfuzji zgodnie z relacją:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{E} * \boldsymbol{f}^{o} \tag{17}$$

gdzie wektor $\boldsymbol{f}^{o}$ określony jest zależnością

$$\left(\boldsymbol{f}^{o}\right)^{\mathrm{T}} = [\, \rho X_i\, , \rho Y_i\, , \rho R_1\, , \rho R_2\,] \tag{18}$$

Wówczas

$$y_i \;=\; \frac{1}{A}\left(4\pi\, C_{ij}\, \frac{\delta(t)}{|x|} + \frac{D_{ij}}{2B} e^{-B\,|x|}\; \delta(t)\right) * f_j^{o} \tag{19}$$

Pole przemieszczeń u_i i obrotów φ_i uzyskuje się analizując transformatę Fouriera równania (2_1) i (2_2), która ma postać:

$$(\mu + \alpha)s^2\, \hat{u}_i - 2\alpha \in_{ijk}\, is_j\, \hat{\varphi}_k - (\lambda + \mu - \alpha) is_i\, \hat{e} + \phi\, is_i \hat{T} + \psi\, is_i \hat{C} \;=\; \rho \hat{X}_i \tag{20}$$

$$(\gamma + \varepsilon)s^2\, \hat{\varphi}_i + 4\alpha\, \hat{\varphi}_i - 2\alpha \in_{ijk} is_j\, \hat{u}_k - (\gamma + \beta - \varepsilon) is_i\, \hat{d} + \overline{\phi}\, is_i \hat{T} + \overline{\psi}\, is_i \hat{C} \;=\; \rho \hat{Y}_i \tag{21}$$

Po wykonaniu transformat rozwiązań (19), podstawieniu do (21) i uporządkowaniu otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{gathered}(\mu + \alpha)\left((\gamma + \varepsilon)s^2 + 4\alpha(1 - \alpha)\right)s^2\, \hat{\varphi}_i - 4\alpha^2 is_i\, is_k\, \hat{\varphi}_k - \\ - is_i\left((\gamma + \beta - \varepsilon)\, \hat{d} - \overline{\phi}\, \hat{T} - \overline{\psi}\, \hat{C}\right) = \rho \hat{Y}_i\end{gathered} \tag{22}$$

którego rozwiązanie określa transformatę składowych pola obrotów:

$$\begin{gathered}\hat{\varphi}_i = \left[is_i\, is_j \left(\frac{R}{F^2 s^2} + \frac{T}{s^4} + \frac{P}{s^2 + G^2} + \frac{Q}{s^2 + H^2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{W}{F^2 s^2} + \frac{Z}{s^2 + G^2} \right) \delta_{ij} \right] \cdot is_j \left[\rho \hat{Y}_j + (\gamma + \beta - \varepsilon)\, \hat{d} - \overline{\phi}\, \hat{T} - \overline{\psi}\, \hat{C} \right]\end{gathered} \tag{23}$$

gdzie:

$$F = (\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon), \quad G = \sqrt{\frac{4\alpha(1 - \alpha)}{\gamma + \varepsilon}}, \quad H = \sqrt{\frac{4\alpha(2 - \alpha)}{\gamma + \varepsilon}}, \quad W = \frac{1}{G^2}, \quad Z = \frac{-1}{F^2 G^2},$$

$$P = \frac{1}{F^2 G^4 (H^2 - G^2)}, \quad Q = \frac{1}{F^2 H^4 (G^2 - H^2)}, \quad R = -\frac{G^2 + H^2}{G^4 H^4}, \quad T = \frac{1}{F^2 G^2 H^2}$$

Wykonując transformatę odwrotną wyrażenia (23) uzyskuje się zależność określającą pole obrotów:

$$\varphi_i = \left[\partial_{ij} \left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{F}^2} \frac{\delta(t)}{|x|} - \mathrm{T}|x|\delta(t) + \frac{\mathrm{P}}{2\mathrm{G}} \mathrm{e}^{-\mathrm{G}|x|}\, \delta(t) + \frac{\mathrm{Q}}{2\mathrm{H}} \mathrm{e}^{-\mathrm{H}|x|}\, \delta(t) \right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{F}^2} \frac{\delta(t)}{|x|} + \frac{\mathrm{Z}}{2\mathrm{G}} \mathrm{e}^{-\mathrm{G}|x|}\, \delta(t) \right) \delta_{ij} \right] * \partial_j \left[\rho Y_j + (\gamma + \beta - \varepsilon) d - \bar{\phi}\, T - \bar{\psi}\, C \right] \tag{24}$$

Następnie, podstawiając transformatę pola obrotów (23) i rozwiązań (19) do równań (20), po uporządkowaniu uzyskuje się transformatę pola przemieszczeń:

$$\hat{u}_i = \frac{1}{(\mu + \alpha) s^2} \left[\rho \hat{X}_i + 2\alpha \in_{ijk} is_j\, \hat{\varphi}_k + (\lambda + \mu - \alpha) is_i\, \hat{e} - \phi\, is_i \hat{T} - \psi\, is_i \hat{C} \right] \tag{25}$$

Po wykonaniu transformaty odwrotnej uzyskuje się zależność określającą pole przemieszczeń:

$$u_i = \frac{1}{(\mu + \alpha)} \frac{\delta(t)}{|x|} * \left[\rho X_i + 2\alpha \in_{ijk} \varphi_{k,j} + (\lambda + \mu - \alpha) e_{,i} - \phi\, T_{,i} - \psi\, C_{,i} \right] \tag{26}$$

3. Podsumowanie

Wyznaczone rozwiązania fundamentalne dla rozpatrywanego zagadnienia pozwalają na przeprowadzenie analizy zmienności pól wpływających na proces termodyfuzji oraz określenie wpływu wzajemnych sprzężeń między rozpatrywanymi polami na ich rozkład. Rozwiązanie przedstawia zmienność temperatury, koncentracji oraz pola przemieszczeń i pola obrotów wywołane przyłożonym jednostkowym impulsem. Uzupełnienie rozważań stanowi rozwiązanie dla źródłowych przyczyn wywołujących proces.

Rozwiązania konkretnych zagadnień przepływów termodyfuzyjnych z uwzględnieniem złożonych warunków początkowo-brzegowych uzyskuje się na podstawie wyprowadzonego rozwiązania fundamentalnego i twierdzenia o wzajemności dla tego typu zagadnienia (por. [3]).

Zastosowana metoda operatorowa umożliwia rozwiązywanie złożonych problemów z dziedziny równań różniczkowych cząstkowych o wielu zmiennych niezależnych.

Oznaczenia symboli

u_i , φ_i – wektor przemieszczenia, wektor obrotu, displacement vector, rotation vector,

ρX_i , ρY_i – wektor siły masowej, wektor momentu masowego, body force vector, body moment vector,

ρ , J – gęstość, moment bezwładności, density, rotation inertia,

ρR_1 , ρR_2 – źródło ciepła, źródło masy, heat source, mass source,

T , C – temperatura, koncentracja, temperature, concentration,

$\mu, \alpha, \lambda, \varepsilon, \gamma, \beta$ – stałe materiałowe, material constants,

$\mathrm{m}, \mathrm{l}, \mathrm{n}, \phi, \bar{\phi}, \psi, \bar{\psi}$ – funkcje relaksacji determinujące process dla izotropowego materiału, the relaxation functions, determining physical properties of the isotropic material;

Literatura

[1] Domański Z., Piskorek A.: Matrices of fundamental solutions for the system of quasi-static equations of thermoelasticity and the system of dynamic equations of thermal stresses., AMS 23,2,1971.
[2] Nowacki W.: Teoria niesymetrycznej sprężystości, PWN, Warszawa, 1971.
[3] Wieczorek B.: The forms of the reciprocal theorem for different thermodynamic formulations of the thermodifusion process in the micropolar medium, VIIth International Conference "Static-structural and constructional-physical problems of engineering constructions", Košice 2005.
[4] Wieczorek B.: The forms of the thermodiffusion flows equations in the micropolar medium for different thermodynamic formulations of the process, 4rd International Conference "New Trends in Statics and Dynamics of Buildings", Bratislava 2005.
[5] Wieczorek B.: The fundamental solutions for the quasi-static problem of elastic termodiffusion, XI International Scientific Conference, Brno 1999.

FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR THE QUASI-STATIC AND STATIONARY PROBLEM OF THERMODIFFUSION PROCESS IN THE ELASTIC SOLID OF MICROPOLAR PROPERTIES

Summary

In a paper the problem of displacement evaluation coupled with the flow of mass and heat consideration is analysed in the elastic solid with micropolar structure. The problem of quasi-static and stationary process is described diffusion and conductivity equations and systems of motion equations for displacements and rotations. The system of equations has eight partial differential equations of the second order. The searched quantities in the problem are: the temperature T, the concentration C, the displacement field u_i and rotation field φ_i.

There is presented the method of the solution for the equations' system. The transformation methods are used in the construction of fundamental solutions of the system of equations. A fundamental solution of that system is built on the basis of Fourier's transformation, its properties and theory of distribution. On their basis are obtained the solution of the initial system. The fundamental solutions and the reciprocity theorem is applied to find the solution of the analyzed initial-boundary problem.