ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 7/2007
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

WYBRANE MODELE EFEKTYWNEJ PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ POROWATYCH MATERIAŁÓW BUDOWLANYCH.
I: Przegląd

Jerzy WYRWAŁ, Andrzej MARYNOWICZ, Jadwiga ŚWIRSKA
Politechnika Opolska, Opole

1. Wprowadzenie

Wektor gęstości efektywnego strumienia ciepła przewodzonego przez materiał porowaty określa *prawo* FOURIERA

$$\mathbf{q} = -k_{eff} \nabla T. \tag{1}$$

Złożoność i różnorodność porowatej struktury wewnętrznej materiału, a także ilość zawartej w nim wody i powietrza, ujmuje w powyższym wzorze *efektywny współczynnik przewodnictwa cieplnego*. Jest to bardzo ważny parametr materiałowy, gdyż od niego zależą np. straty ciepła przez przegrody budowlane. Należy zaznaczyć, że matematyczne modelowanie i eksperymentalne wyznaczanie tego współczynnika jest – w przypadku materiałów zawierających w porach powietrze i wodę – zagadnieniem złożonym i trudnym.

W niniejszej pracy zebrano i omówiono najczęściej spotykane w literaturze analityczne modele[1] efektywnego współczynnika przewodności cieplnej, dające możliwość określenia strumienia ciepła w porowatych materiałach budowlanych.

2. Efektywna przewodność cieplna

Rozważymy *trójfazowy* ośrodek porowaty, składający się ze *szkieletu S* (*fazy stałej*) oraz *wody W* (*fazy ciekłej*) i *powietrza A* (*fazy gazowej*) – te ostatnie fazy wypełniają oczywiście pory ośrodka. Koncentracje (udziały) objętościowe faz łączy oczywisty związek

$$w_S + w_W + w_A = 1, \tag{2}$$

z którego, w przypadku materiału o nieodkształcalnym szkielecie, wynika że

$$\epsilon = 1 - w_S = const. \tag{3}$$

[1] Z uwagi na ich umotywowanie fizyczne, szybkość i niski koszt obliczeń, a także wystarczającą dokładność (nawet w przypadku, gdy nie jest znana mikrostruktura materiału) modele te są w wielu zastosowaniach praktycznych przedkładane nad modele numeryczne.

W najprostszym ujęciu, efektywna przewodność cieplna takiego materiału jest funkcją

$$k_{eff} = k_{eff}(w_S, w_W, w_A; k_S, k_W, k_A). \tag{4}$$

Ze wzorów (2) i (3) wynikają zależności

$$w_S = 1 - \epsilon, \; w_A = \epsilon - w_W, \tag{5}$$

pozwalające wyeliminować z relacji (4) koncentracje w_S oraz w_A i przedstawić ją w postaci funkcji zawartości wody w materiale porowatym (przedmiotem dalszych rozważań będzie przegląd i analiza zaczerpniętych z literatury analitycznych zależności modelujących postać tej funkcji)

$$k_{eff} = k_{eff}(w_W, \epsilon; k_S, k_W, k_A), \quad w_W \in [0, \epsilon]. \tag{6}$$

Powyższy współczynnik osiąga wartości graniczne (minimalną i maksymalną), w przypadku:

1. *ośrodka suchego* (struktura dwufazowa − pory wypełnione powietrzem)

$$k_{eff}(w_W \equiv 0) = k_{min} = k_{dry}(\epsilon; k_S, k_A), \tag{7}$$

2. *ośrodka mokrego* (struktura dwufazowa − pory wypełnione wodą)

$$k_{eff}(w_W \equiv \epsilon) = k_{max} = k_{wet}(\epsilon; k_S, k_W). \tag{8}$$

Ponieważ współczynniki przewodnictwa cieplnego powietrza i wody są znane[2], zaś porowatość ϵ i współczynnik przewodnictwa cieplnego szkieletu materiałów budowlanych k_S są dostępne w literaturze (w razie potrzeby można je też wyznaczyć eksperymentalnie), to uszczegółowione postacie wzoru (6) mogą posłużyć do wyznaczenia efektywnego współczynnika przewodności cieplnej wilgotnych materiałów budowlanych.

3. Modele efektywnej przewodności cieplnej

3.1. Ośrodki trójfazowe

Modele WARSTWOWE. Jeżeli założymy, że zdefiniowany wyżej ośrodek porowaty jest strukturą składającą się z równoległych do siebie warstw szkieletu, wody i powietrza, których przekrój jest proporcjonalny do koncentracji objętościowych tych faz, to możliwe są dwa skrajne przypadki skierowania wektora strumienia ciepła względem takiej struktury, a mianowicie: równolegle i prostopadle do warstw. Otrzymujemy wtedy odpowiednio:

Pierwszy ("RÓWNOLEGŁY") model warstwowy (P) – ciepło płynie równolegle do warstw[3]

$$k_{eff}^{P} = w_S k_S + w_W k_W + w_A k_A = (1-\epsilon)k_S + w_W k_W + (\epsilon - w_W)k_A, \tag{9}$$

---

[2] Np. Brodkey R.S., Hershey H.C.: Transport phenomena. A unified approach, McGraw-Hill, New York 1989.

[3] Model ten można także otrzymać przy wykorzystaniu metody uśredniania przestrzennego [1, 2].

Drugi ("SZEREGOWY") model warstwowy (S) – ciepło płynie prostopadle do warstw

$$k_{eff}^{S} = \left(\frac{w_S}{k_S} + \frac{w_W}{k_W} + \frac{w_A}{k_A} \right)^{-1} = \left(\frac{1-\epsilon}{k_S} + \frac{w_W}{k_W} + \frac{\epsilon - w_W}{k_A} \right)^{-1}. \qquad (10)$$

Ponieważ w rzeczywistym materiale poszczególne fazy są rozłożone przypadkowo, wartości k_{eff}^{S} i k_{eff}^{P} określają dolną i górną granicę rzeczywistej przewodności cieplnej materiału, czyli (nierówność WIENERA)

$$k_{eff}^{S} \le k_{eff} \le k_{eff}^{P}. \qquad (11)$$

W literaturze spotyka się następujące modele wykorzystujące funkcje (9) i (10):
Model HORAI'EGO (H) [3]

$$k_{eff}^{H} = \frac{k_{eff}^{S} + k_{eff}^{P}}{2}. \qquad (12)$$

Model BECKA-BECKA (BB) [4]

$$k_{eff}^{BB} = \sqrt{k_{eff}^{S} k_{eff}^{P}}. \qquad (13)$$

Model KRISCHERA (K) [5]

$$k_{eff}^{K} = \left(\frac{1-f}{k_{eff}^{P}} + \frac{f}{k_{eff}^{S}} \right)^{-1}, \quad f \in [0,1], \qquad (14)$$

w przypadku którego parametr (współczynnik strukturalny) f musi być wyznaczony na drodze eksperymentalnej [6]. Ogranicza to możliwości zastosowań modelu KRISCHERA.

3.2. Ośrodki dwufazowe

Modeli opisujących efektywną przewodność cieplną dwufazowych ośrodków porowatych, których pory wypełnione są jedną fazą płynną F (wodą bądź powietrzem) jest bardzo dużo. Pozwalają one oszacować wymienione wyżej graniczne wartości (minimalną i maksymalną) efektywnej przewodności cieplnej. Przy ich pomocy można też określić przewodność cieplną materiałów nienasyconych w dwóch etapach. W etapie pierwszym obliczamy przewodność cieplną w funkcji koncentracji powietrza, zaś w drugim, na bazie obliczeń z etapu pierwszego, określamy przewodność cieplną w funkcji koncentracji objętościowej wody.

Poniżej przedstawiono wybrane modele dwufazowe, które nie wymagają żadnych dodatkowych informacji o strukturze i właściwościach analizowanego materiału, poza wielkościami $\epsilon; k_S, k_F$. We wszystkich poniższych modelach należy przyjąć $F \equiv A$, jeżeli fazą płynną jest powietrze (materiał suchy), zaś $F \equiv W$, gdy fazą płynną jest woda (materiał mokry).

Model "RÓWNOLEGŁY" (P)

$$k_{eff}^{P} = w_S k_S + w_F k_F = (1-\epsilon)k_S + \epsilon k_F. \quad (15)$$

Model "SZEREGOWY" (S)

$$k_{eff}^{S} = \left(\frac{w_S}{k_S} + \frac{w_F}{k_F}\right)^{-1} = \left(\frac{1-\epsilon}{k_S} + \frac{\epsilon}{k_F}\right)^{-1}. \quad (16)$$

Modele MAXWELLA-EUCKENA (ME) [7]. Jeżeli przyjmiemy, że nasycony ośrodek porowaty jest strukturą, w której jedna faza (rozproszona) tworzy małe sfery w drugiej fazie (ciągłej), to przy założeniu, że $k_S > k_F$, można wyróżnić tu dwa przypadki (każdy z nich przedstawiono w trzech, spotykanych w literaturze, równoważnych postaciach):

Pierwszy model MAXWELLA-EUCKENA ($ME1$) – faza F rozproszona w fazie S

$$k_{eff}^{ME1} = \frac{w_S k_S + w_F \dfrac{3k_S k_F}{2k_S + k_F}}{w_S + w_F \dfrac{3k_S}{2k_S + k_F}} = k_S \frac{2k_S + k_F - 2\epsilon(k_S - k_F)}{2k_S + k_F + \epsilon(k_S - k_F)} = k_S + \frac{\epsilon}{\dfrac{1}{k_F - k_S} + \dfrac{1-\epsilon}{3k_S}}. \quad (17)$$

Drugi model MAXWELLA-EUCKENA ($ME2$) – faza S rozproszona w fazie F

$$k_{eff}^{ME2} = \frac{w_F k_F + w_S \dfrac{3k_S k_F}{2k_F + k_S}}{w_F + w_S \dfrac{3k_F}{2k_F + k_S}} = k_F \frac{2k_F + k_S - 2(1-\epsilon)(k_F - k_S)}{2k_F + k_S + (1-\epsilon)(k_F - k_S)} = k_F + \frac{1-\epsilon}{\dfrac{1}{k_S - k_F} + \dfrac{\epsilon}{3k_F}}. \quad (18)$$

Model ($ME1$) lepiej opisuje przewodność cieplną materiałów o porowatości "wewnętrznej", zaś model ($ME2$) − o porowatości "zewnętrznej"[4].

Powyższe modele pozwalają lepiej niż nierówność (11) oszacować przedział, w którym powinna znajdować się rzeczywista przewodności cieplnej materiału, gdyż (nierówność HASHINA-SHTRINKMANA[5])

$$k_{eff}^{S} \le k_{eff}^{ME2} \le k_{eff} \le k_{eff}^{ME1} \le k_{eff}^{P}. \quad (19)$$

Model EMT (EFFECTIVE MEDIUM THEORY) [9] (wyprowadzony na drodze analizy procesu przewodzenia ciepła przez ośrodek o losowym rozmieszczeniu obu faz)

$$k_{eff}^{EMT} = \frac{1}{4}\left\{(3\epsilon-1)k_F + [3(1-\epsilon)-1]k_S + \sqrt{\langle(3\epsilon-1)k_F + [3(1-\epsilon)-1]k_S\rangle^2 + 8k_S k_F}\right\}. \quad (20)$$

[4] Materiał porowaty charakteryzuje się porowatością "wewnętrzną" wtedy, gdy dominującą rolę w przenoszeniu ciepła odgrywa faza stała, natomiast "zewnętrzną", gdy role tę pełni faza ciekła. Rodzaj porowatości zależy od struktury materiału i można go określić eksperymentalnie [7].

[5] Należy zaznaczyć, że obie powyższe zależności zostały wyprowadzone przez tych badaczy na innej drodze [8].

Model ASSADA (A) [10]

$$k_{eff}^{A} = k_S \left(\frac{k_F}{k_S} \right)^{\epsilon}. \tag{21}$$

Model WOODSIDE'A-MESSMERA (WM) [11]

$$k_{eff}^{WM} = k_S{}^{\epsilon} k_F{}^{1-\epsilon}. \tag{22}$$

Chociaż model ten nie jest oparty na żadnych podstawach fizycznych (podobnie zresztą jak modele (12), (13), (14) oraz (21)), to z uwagi na swoją prostotę i łatwość stosowania jest przez wielu autorów preferowany, gdyż w niektórych przypadkach pozwala otrzymać rezultaty zbliżone do tych, które wynikają z modelu (17) [12].

6. Podsumowanie

Z powyższego, z konieczności skrótowego, przeglądu i omówienia najczęściej spotykanych analitycznych modeli efektywnej przewodności cieplnej materiałów porowatych[6] wynika, że wiele z nich bazuje w mniejszym lub większym stopniu na jednym z pięciu podstawowych (umotywowanych fizycznie) modeli strukturalnych, a mianowicie:

1) pierwszym (układ faz równoległych do kierunku przepływu ciepła) lub drugim (układ faz prostopadłych do kierunku przepływu ciepła) modelu warstwowym,
2) pierwszym lub drugim modelu MAXWELLA-EUKENA (sfery jednej fazy rozproszone w drugiej fazie),
3) modelu EMT (losowe rozmieszczenie poszczególnych faz materiału).

Należy jednak podkreślić, że w literaturze spotyka się też wiele modeli empirycznych, które nie mają żadnego umotywowania fizykalnego, a są z powodzeniem wykorzystywane w zastosowaniach praktycznych.

Bez głębszej analizy i weryfikacji eksperymentalnej zaprezentowanych modeli trudno wyrokować o ich przydatności do wyznaczania efektywnej przewodności cieplnej wilgotnych materiałów budowlanych. Problem ten będzie rozważany w części drugiej niniejszej pracy.

Oznaczenie symboli

k	–	współczynnik przewodności cieplnej, heat conduction coefficient [$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)],
$\mathbf{q}$	–	strumień ciepła, heat flux [$W \cdot m^{-2}$],
T	–	temperatura, temperature [K],
w	–	koncentracja objętościowa, volume concentration [$m^3 \cdot m^{-3}$],
ϵ	–	porowatość, porosity [$m^3 \cdot m^{-3}$].
ρ	–	gęstość, density [$kg \cdot m^{-3}$].
A	–	powietrze, air,
dry	–	suchy, dry,
eff	–	efektywny, effective,
exp	–	eksperymentalny, experimental,
F	–	płyn (powietrze lub woda), fluid (air or water),
S	–	szkielet, skeleton,

[6] Obszerną literaturę problemu można znaleźć np. w pracy [13].

W – woda, water.
∇ – operator HAMILTONA, HAMILTON'S operator.

Literatura

[1] Whitaker S.: Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media: a theory of drying, Advances in Heat Transfer, 13, Academic Press, New York 1977, 119-203.
[2] Wyrwał J.: Termodynamiczne podstawy fizyki budowli, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole 2004.
[3] Horai K.: Thermal conductivity of Hawaiian basalt: a new interpretation of Robertson and Peck's data, J. Geophys. Res., 96, 1991, 4125-4132.
[4] Beck J.M., Beck A.E.: Computing thermal conductivities of rocks from chips and conventional speciments, J. Geophys. Res., 70, 1965, 5227-5239.
[5] Krischer O.: Die wissenschlaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik, Springer-Verlag, Berlin 1963.
[6] Hamdani N., Monteau J-Y., Le Bail A.: Effective thermal conductivity of a high porosity model food at above and sub-freezing temperatures, International Journal of Refrigeration, 26, 2003, 809-816.
[7] Carson J.K.: Thermal conductivity bounds for isotropic, porous materials, International Journal of Heat and Mass transfer, 48, 2005, 2150-2158.
[8] Hashin S., Shtrinkman D.S.: A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials, J. Appl. Phys., 33, 1962, 3125-3131.
[9] Landauer R: The electrical resistance of binary metallic mixture, J. Appl. Phys., 23, 1952, 779-784.
[10] Assad A.: Study of thermal conductivity of fluid bearing porous rocks, University of California, California 1955.
[11] Woodside W., Messmer J.: Thermal conductivity of porous media. I: Unconsolidated sands & II: Consolidated sands, J. Appl. Phys., 32, 1961, 1688-699 &1699-768.
[12] Maqsood A., Kamran K.: Thermophysical properties of porous sand stones: Measurements and comparative study of some representative thermal conductivity models, International Journal of Thermophysics, 26, 5, 2005, 1617-1632.
[13] Carson J.K.: Review of effective thermal conductivity models for foods, International Journal of Refrigeration, 29, 2006, 958-967.

EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY SELECTED MODELS OF POROUS BUILDING MATERIALS
I. Review

Summary

Effective thermal conductivity of porous building materials is a very important parameter particularly in the thermal performance analysis of building envelopes. There are many different analytical models to estimate or calculate effective thermal conductivity of N–phase porous media partially or fully filled with air and/or water. In this paper the selected models of effective thermal conductivity for *2* and *3* –phase porous material are selected and reviewed.