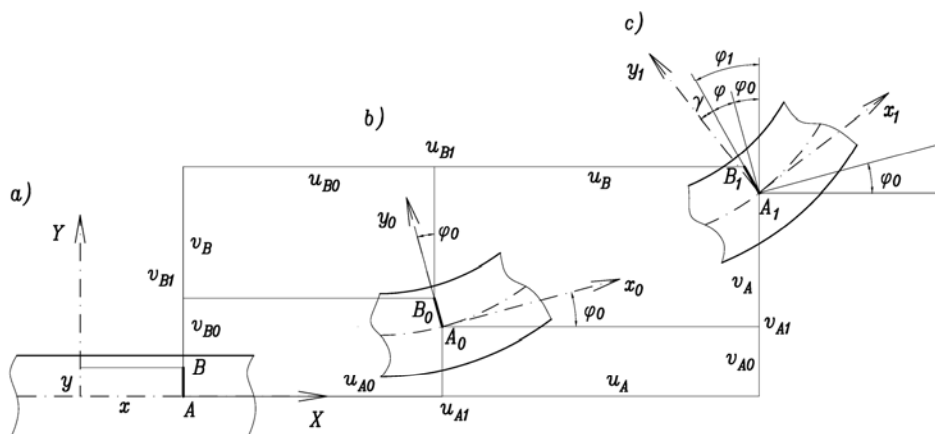


TENSORY GREENA-LAGRANGE’A I PIOLI-KIRCHHOFFA W PŁASKIM ELEMENTE BELKOWYM

Jan ZAMOROWSKI
Politechnika Śląska, Gliwice

1. Wprowadzenie

W referacie [1] przedstawiono przyrostowe równania równowagi w całkowitym opisie Lagrange’a dla płaskiego, wstępnie zdeformowanego elementu prętowego typu Timoshenki w ujęciu geometrycznie nieliniowym przy założeniu dużych przemieszczeń, dużych obrotów (lecz takich przy których możliwe są małe odkształcenia i liniowo-sprężysty materiał), przyjmując że długość dowolnego odcinka przekroju poprzecznego AB (rys. 1) po odkształceniu elementu nie ulega zmianie ($\nu = 0$). W niniejszym referacie wyprowadzono wzory na składowe tensora odkształceń Greena-Lagrange’a i drugiego tensora naprężeń Pioli-Kirchhoffa, przy założeniach jak poprzednio oraz dla małych obrotów.



Rys. 1. Konfiguracje pręta: a) początkowa, b) po wstępnym wygięciu, c) odkształcona
Fig. 1. Configuration of the bar: a) initial, b) after its preliminary bending, c) in its distorted state

2. Tensor odkształceń Greena-Lagrange’a

Korzystając z definicji tensora odkształceń Greena-Lagrange’a zawartej w [2]

$$ds^2 - ds_0^2 = 2E_{ij}da_i da_j, \quad (1)$$

określonej dla początkowego układu współrzędnych a_1, a_2, a_3 , gdzie ds_0 i ds – długości nieskończenie małego elementu liniowego, odpowiednio przed odkształceniem i po odkształceniu, przyjęto stan „0” jak dla elementu wstępnie, beznaprężeniowo zdeformowanego. Wprowadzając $x = a_1$, $y = a_2$, współrzędne dowolnego punktu dla stanu „0” i po odkształceniu sprężystym (stan „1”) przyjmują postać

$$x_0 = x + u_0, \quad y_0 = y + v_0, \quad \text{a stąd} \quad dx_0 = dx + du_0, \quad dy_0 = dy + dv_0, \quad (1a)$$

$$x_1 = x_0 + u, \quad y_1 = y_0 + v \quad \text{oraz} \quad dx_1 = dx_0 + du, \quad dy_1 = dy_0 + dv. \quad (1b)$$

Uwzględniając, że

$$ds_0^2 = dx_0^2 + dy_0^2, \quad ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 = dx_0^2 + 2dx_0 du + du^2 + dy_0^2 + 2dy_0 dv + dv^2 \quad (1c)$$

uzyskuje się

$$\frac{1}{2}(ds_1^2 - ds_0^2) = \frac{1}{2}(du^2 + dv^2) + dx_0 du + dy_0 dv.$$

Podstawiając

$$\begin{aligned} du &= u_{,x} dx + u_{,y} dy, \quad dv = v_{,x} dx + v_{,y} dy, \\ dx_0 &= dx + u_{0,x} dx + u_{0,y} dy, \quad dy_0 = dy + v_{0,x} dx + v_{0,y} dy, \end{aligned} \quad (1d)$$

gdzie np. $u_{,x} = du/dx$, otrzymano

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(ds_1^2 - ds_0^2) &= \frac{1}{2} \left[u_{,x}^2 dx^2 + 2u_{,x} u_{,y} dx dy + u_{,y}^2 dy^2 + v_{,x}^2 dx^2 + 2v_{,x} v_{,y} dx dy + v_{,y}^2 dy^2 \right] \\ &+ u_{,x} dx^2 + u_{0,x} u_{,x} dx^2 + u_{0,y} u_{,x} dx dy + u_{,y} dx dy + u_{0,x} u_{,y} dx dy + u_{0,y} u_{,y} dy^2 \\ &+ v_{,x} dx dy + v_{0,x} v_{,x} dx^2 + v_{0,y} v_{,x} dx dy + v_{,y} dy^2 + v_{0,x} v_{,y} dx dy + v_{0,y} v_{,y} dy^2, \end{aligned} \quad (1e)$$

a stąd

$$\begin{aligned} L_{xx} &= (1 + u_{0,x}) u_{,x} + v_{0,x} v_{,x} + \frac{1}{2} [u_{,x}^2 + v_{,x}^2], \quad L_{yy} = (1 + v_{0,y}) v_{,y} + u_{0,y} u_{,y} + \frac{1}{2} [u_{,y}^2 + v_{,y}^2], \\ 2L_{xy} &= (1 + u_{0,x}) u_{,y} + (1 + v_{0,y}) v_{,x} + (u_{0,y} + u_{,y}) u_{,x} + (v_{0,x} + v_{,x}) v_{,y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Uzyskane wyrażenia na składowe tensora Greena-Lagrange’a są zgodne z [4]. Analogiczne wyrażenia można otrzymać przyjmując różnicę tensorów dla stanu odkształconego i wstępnie zdeformowanego jak w [1]: $L = L(u_0 + u, v_0 + v) - L(u_0, v_0)$.

Uwzględniając związki geometryczne wynikające z rys. 1, otrzymuje się przy dużych oraz małych obrotach odpowiednio dla stanu wstępnie zdeformowanego

$$x + u_{B0} = x + u_{A0} - y \sin \varphi_0, \quad y + v_{B0} = 0 + v_{A0} + y \cos \varphi_0 \quad \text{oraz} \quad (3a)$$

$$x + u_{B0} = x + u_{A0} - y \varphi_0, \quad y + v_{B0} = 0 + v_{A0} + y, \quad \text{skąd} \quad (3b)$$

$$u_{B0} = u_{A0} - y \sin \varphi_0, \quad v_{B0} = v_{A0} - y(1 - \cos \varphi_0) \quad \text{oraz} \quad (3c)$$

$$u_{B0} = u_{A0} - y\varphi_0, \quad v_{B0} = v_{A0}, \quad (3d)$$

zaś dla stanu sprężystości odkształconego

$$x + u_{B0} + u_B = x + u_{A0} + u_A - y \sin(\varphi_0 + \varphi), \quad y + v_{B0} + v_B = 0 + v_{A0} + v_A + y \cos(\varphi_0 + \varphi), \quad (3e)$$

$$x + u_{B0} + u_B = x + u_{A0} + u_A - y(\varphi_0 + \varphi), \quad y + v_{B0} + v_B = 0 + v_{A0} + v_A + y(1 - \varphi_0\varphi), \quad (3f)$$

skąd

$$u_B = u_A - y \sin(\varphi_0 + \varphi) + y \sin \varphi_0, \quad v_B = v_A + y \cos(\varphi_0 + \varphi) - y \cos \varphi_0 \quad (3g)$$

oraz

$$u_B = u_A - y(\varphi_0 + \varphi) + y\varphi_0 = u_A - y\varphi, \quad v_B = v_A - y\varphi_0\varphi. \quad (3h)$$

Wprowadzając pochodne przemieszczeń punktów B_0 i B wg (3c, d) i (3g, h) do (2) oraz pomijając wskaźnik A w oznaczeniu przemieszczeń punktów położonych na osi obrotowej, otrzymano dla dużych obrotów

$$\begin{aligned} L_{xx} = & (1 + u_{0,x})u_{,x} + (u_{,x})^2/2 + (v_{0,x} + v_{,x}/2)v_{,x} + y^2(\varphi_{0,x} + \varphi_{,x}/2)\varphi_{,x} \\ & - y(\varphi_{0,x} + \varphi_{,x})(1 + u_{0,x} + u_{,x}) \cos(\varphi_0 + \varphi) - y(\varphi_{0,x} + \varphi_{,x})(v_{0,x} + v_{,x}) \sin(\varphi_0 + \varphi) \\ & + y(1 + u_{0,x})\varphi_{0,x} \cos \varphi_0 + yv_{0,x}\varphi_{0,x} \sin \varphi_0, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$2L_{xy} = (v_{0,x} + v_{,x}) \cos(\varphi_0 + \varphi) - (1 + u_{0,x} + u_{,x}) \sin(\varphi_0 + \varphi) + (1 + u_{0,x}) \sin \varphi_0 - v_{0,x} \cos \varphi_0,$$

$$L_{yy} = 0.$$

zaś dla małych obrotów

$$\begin{aligned} L_{xx} = & \left[1 + u_{0,x} + \frac{1}{2}u_{,x} - y(\varphi_{0,x} + \varphi_{,x}) \right] u_{,x} + \left[v_{0,x} + \frac{1}{2}v_{,x} - y(\varphi_{0,x}\varphi + \varphi_0\varphi_{,x}) \right] v_{,x} \\ & + \left[\frac{1}{2}y^2(1 + \varphi_0^2)\varphi_{,x} + y^2\varphi_{0,x}(1 + \varphi_0\varphi) - y(1 + u_{0,x}) - yv_{0,x}\varphi_0 \right] \varphi_{,x} + y\varphi_{0,x} \left(\frac{1}{2}y\varphi_{0,x}\varphi - v_{0,x} \right) \varphi, \end{aligned} \quad (4b)$$

$$2L_{xy} = -(\varphi_0 + \varphi)u_{,x} + (1 - \varphi_0\varphi)v_{,x} + y\varphi(1 + \varphi_0^2)\varphi_{,x} - [1 + u_{0,x} + \varphi_0(v_{0,x} - y\varphi_{0,x}\varphi)]\varphi.$$

3. Tensor naprężeń Pioli-Kirchhoffa

W przypadku materiału sprężystego, jednorodnego, izotropowego przyjmuje się związek fizyczny w postaci drugiego tensora naprężeń Pioli-Kirchhoffa jak w [3]

$$T_{ij}^{(2)} = \beta_0 \delta_{ij} + \beta_1 L_{ij} + \beta_2 L_{ik} L_{kj}. \quad (5.1)$$

Wprowadzając do (5.1) $\beta_0 = \lambda I_1^L$, $\beta_1 = 2\mu$, $\beta_2 = 0$, gdzie $I_1^L = L_{xx} + L_{yy}$ - pierwszy niezmiennik tensora odkształceń Greena-Lagrange'a oraz λ, μ - stałe fizyczne Lamé'go, otrzymuje się liniowe prawo fizyczne Hooke'a

$$T_{ij}^{(2)} = 2\mu L_{ij} + \lambda \delta_{ij} L_{kk}, \quad \text{przy czym } \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G. \quad (5.2)$$

W przypadku płaskiego stanu naprężeń oraz układu początkowego jak na rys. 1a otrzymuje się

$$\begin{aligned} T_{xx}^{(2)} &= 2\mu L_{xx} + \lambda \delta_{xx} (L_{xx} + L_{yy}), \quad T_{yy}^{(2)} = 2\mu L_{yy} + \lambda \delta_{yy} (L_{xx} + L_{yy}), \\ T_{xy}^{(2)} &= 2\mu L_{xy} + \lambda \delta_{xy} (L_{xx} + L_{yy}) = 2\mu L_{xy}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Przyjmując jak w założeniach $\nu = 0$ oraz uwzględniając, że wg (4a) $L_{yy} = 0$ uzyskano

$$\begin{aligned} T_{xx}^{(2)} &= 2 \frac{E}{2(1+\nu)} L_{xx} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (L_{xx} + L_{yy}) = EL_{xx}, \quad T_{xy}^{(2)} = 2\mu L_{xy} = 2GL_{xy}, \\ T_{yy}^{(2)} &= 2\mu L_{yy} + \lambda \delta_{yy} (L_{xx} + L_{yy}) = 2 \frac{E}{2(1+\nu)} L_{yy} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (L_{xx} + L_{yy}) = 0. \end{aligned} \quad (5.3a)$$

Oznaczenia symboli

$L_{xx}, L_{xy}, L_{ik}, L_{ki}$ – tensor odkształceń Greena-Lagrange’a, Green-Lagrange strain,
 $T_{xx}^{(2)}, T_{xy}^{(2)}$ – drugi tensor naprężeń Piola-Kirchhoffa, the 2nd Piola-Kirchhoff stresses,
 β_1, β_2 – funkcje (stałe) materiałowe.

Literatura

- [1] Zamorowski J.: Wstępnie zdeformowany, nieliniowy geometrycznie, płaski element prętowy typu Timoshenki, Sympozjum „Trwałość Materiałów i Konstrukcji Budowlanych” Kamień Śląski 2005, s.94-97.
- [2] Fung Y.C. Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN, Warszawa 1969.
- [3] Paluch M.: Podstawy mechaniki ośrodków odkształcalnych. Wydanie drugie rozszerzone, CIT, Kraków 1997.
- [4] Kleiber M.: Mechanika techniczna. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych. t. XI, PWN, Warszawa 1995.

GREEN-LAGRANGE’S AND PIOLA-KIRCHHOFF’S TENSOR IN A FLAT BEAM ELEMENT

Summary

Formulae have been introduced for the components of Green-Lagrange’s strain tensor and the 2nd Piola-Kirchhoff’s stress tensor for primarily deformed flat beam elements of the Timoshenko-type at large displacements and large and small rotations.