ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 8/2008
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ANALOGIE RÓWNAŃ OPISUJĄCYCH PROCES TERMODYFUZJI W OŚRODKU CIĄGŁYM I MIKROPOLARNYM

Barbara WIECZOREK
Politechnika Śląska, Gliwice

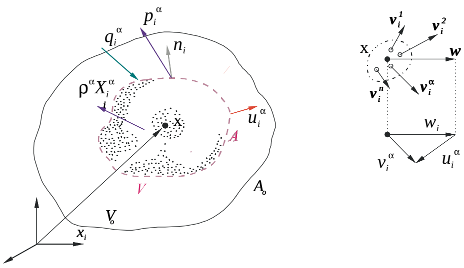
1. Wprowadzenie

Klasyczna teoria sprężystości i lepkosprężystości opiera się na idealnym modelu ośrodka ciągłego, w którym transmisja obciążeń odbywa się wyłącznie za pośrednictwem symetrycznego tensora naprężeń. Przy tym założeniu otrzymuje się opis mechaniki ciała przez symetryczne tensory odkształcenia γ_{ji} i naprężenia σ_{ji}.

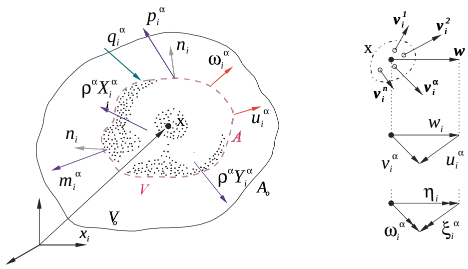
Miedzy klasyczną teorią a doświadczeniem występują znaczne rozbieżności. Szczególnie zauważalne są one w przypadku ciał wielocząsteczkowych. W tym celu wprowadzono modyfikację klasycznego modelu ciała ciągłego, przyjmując założenie, że transmisja oddziaływań dwu części ciała na siebie odbywa się przez wektor siły p_i i wektor momentu m_i. Takie założenie sprowadza się do stwierdzenia, iż na ciało działają nie tylko naprężenia siłowe σ_{ji}, ale również naprężenia momentowe μ_{ji}. W ten sposób otrzymano ośrodek polarny, którego deformacja opisana jest przez wektor przemieszczenia u_i i wektor obrotu φ_i. Ten ośrodek o elementach materialnych mających 6 stopni swobody, charakteryzuje się niesymetrycznym tensorem deformacji i naprężenia.

2. Model ośrodka

Wprowadzając model ośrodka ciągłego i uwzględniając jego wieloskładnikową strukturę zakłada się, że każda cząsteczka ciała zawiera wszystkie jego składniki, z których każdy ma własną kinematykę, tzn. jego deformacja opisana jest przez wektor przemieszczenia $x_i^\alpha(x_k, t)$. Przyjęto, iż składniki ciała doznają odkształceń pod wpływem oddziaływań zewnętrznych, do których należą siła powierzchniowa $p_i^\alpha(x_k, t)$ i masowa $X_i^\alpha(x_k, t)$. Dodatkowo uwzględnia się wpływ procesu cieplnego i dyfuzyjnego na ciało. Każdy składnik (α) porusza się z prędkością liniową $v_i^\alpha(x_k, t)$. Na tej podstawie definiuje się prędkość dyfuzyjną liniową $u_i^\alpha(x_k, t)$ dla każdego składnika, przyjmując $v_i^\alpha = u_i^\alpha - w_i$, gdzie w_i to prędkość liniowa całej cząstki (rys.1).



Rys. 1   Model ośrodka ciągłego



Rys. 2   Model ośrodka mikropolarnego

Wprowadzając model wieloskładnikowego ośrodka mikropolarnego przyjmuje się wszystkie założenia dotyczące ośrodka ciągłego oraz wprowadza się dodatkowe warunki uwzględniające mikropolarne własności ciała. A mianowicie, deformację ośrodka precyzuje się poprzez wprowadzenie wektora obrotu $\varphi_i^{\alpha}(x_k,t)$, niezależnego od wektora przemieszczenia $x_i^{\alpha}(x_k,t)$. Wówczas każdy składnik (α) poruszający się z prędkością liniową $v_i^{\alpha}(x_k,t)$ doznaje równocześnie obrotu z prędkością $\omega_i^{\alpha}(x_k,t)$. Na tej podstawie definiuje się prędkość dyfuzyjną obrotową $\varsigma_i^{\alpha}(x_k,t)$ dla każdego składnika, przyjmując $\omega_i^{\alpha} = \varsigma_i^{\alpha} - \eta_i$, gdzie η_i to prędkość obrotowa całej cząstki. Należy również przyjąć, iż składniki ciała doznają odkształceń nie tylko pod wpływem siły powierzchniowej $p_i^{\alpha}(x_k,t)$ i masowej $X_i^{\alpha}(x_k,t)$, ale także pod wpływem momentu powierzchniowego $m_i^{\alpha}(x_k,t)$ i masowego $Y_i^{\alpha}(x_k,t)$ (rys.2).

3. Równania ośrodka

Przyjęty model ośrodka wieloskładnikowego określony jest przez równania bilansów ujmujące wzajemne oddziaływania składników. Szczegółowa ich postać dla wieloskładnikowego ośrodka ciągłego została przedstawiona w publikacji [1] i [5]. W wyniku przekształceń tego układu bilansów uzyskuje się równania ośrodka, w którym spełnione są zasady zachowania masy, pędu, momentu pędu, energii i entropii. Na ich podstawie uzyskuje się nierówność rezydualną, która powinna być spełniona dla każdego rzeczywistego przepływu termodynamicznego w ciele stałym niezależnie od fizykalnych właściwości materiału.

W sformułowaniu termodyfuzji bazującym na pojęciu energii wewnętrznej, jako niezależne historie w procesie wystąpią historie odkształcenia, entropii oraz koncentracji. Wówczas funkcjonał energii wewnętrznej przyjmuje następującą postać:

$$\rho U = \rho U\big(\,\gamma_{ij}(\tau)\,;\,S(\tau)\,;\,c(\tau)\,\big). \tag{1}$$

W oparciu o nierówność rezydualną, po przyjęciu funkcjonału (1) wyprowadza się równania konstytutywne, które dla izotropowego materiału (por. [1]) przyjmują postać:

$$\sigma_{ij} = (2\mu) * d\gamma_{ij} + \lambda * d\gamma_{kk}\,\delta_{ij} - \varphi * dS\,\delta_{ij} - \psi * dc\,\delta_{ij}\,, \tag{2}$$

$$T = \varphi * d\gamma_{jj} + \mathbf{m} * dS + \mathbf{l} * dc\,, \tag{3}$$

$$M = \psi * d\gamma_{jj} + \mathbf{l} * dS + \mathbf{n} * dc\,, \tag{4}$$

gdzie μ, λ, φ, ψ są funkcjami relaksacji.

Równania bilansów dla jednoskładnikowego ośrodka mikropolarnego podane zostały w publikacji [2], a ich uogólnienie na ośrodek wieloskładnikowy przedstawiono w publikacji [3]. Do konstrukcji równań przepływów cieplnych i dyfuzyjnych w ośrodku mikropolarnym wykorzystano funkcjonał energii wewnętrznej w postaci:

$$\rho U = \rho U\left(\gamma_{ij}(\tau) \, ; \, \chi_{ij}(\tau) \, ; \, S(\tau) \, ; \, c(\tau) \right), \tag{5}$$

przy czym historia odkształcenia ośrodka ciągłego uwzględnia tylko liniowe odkształcenia, natomiast w przypadku ośrodka mikropolarnego uwzględniono również odkształcenia postaciowe.

Analogicznie jak w dla ośrodka ciągłego równania tworzące na naprężenia, temperaturę i potencjał chemiczny są funkcjami historii odkształcenia, entropii i koncentracji:

$$\begin{gathered} \sigma_{ij} = (\mu+\phi)*d\gamma_{ij} + (\mu-\phi)*d\gamma_{ij} + \lambda*d\gamma_{kk}\,\delta_{ij} + \\ + (\alpha+\vartheta)*d\chi_{ij} + (\alpha-\vartheta)*d\chi_{ij} + \varepsilon*d\chi_{kk}\,\delta_{ij} - \varphi*dS\,\delta_{ij} - \psi*dc\,\delta_{ij}, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \mu_{ij} = (\alpha+\vartheta)*d\gamma_{ij} + (\alpha-\vartheta)*d\gamma_{ij} + \varepsilon*d\gamma_{kk}\,\delta_{ij} + \\ + (\gamma+\kappa)*d\chi_{ij} + (\gamma-\kappa)*d\chi_{ij} + \beta*d\chi_{kk}\,\delta_{ij} - \overline{\varphi}*dS\,\delta_{ij} - \overline{\psi}*dc\,\delta_{ij}, \end{gathered} \tag{7}$$

$$T = \varphi*d\gamma_{jj} + \overline{\varphi}*d\chi_{jj} + \mathrm{m}*dS + \mathrm{l}*dc, \tag{8}$$

$$M = \psi*d\gamma_{jj} + \overline{\psi}*d\chi_{jj} + \mathbf{l}*dS + \mathbf{n}*dc, \tag{9}$$

gdzie $\mu, \lambda, \phi, \vartheta, \alpha, \varepsilon, \varphi, \overline{\varphi}, \psi, \overline{\psi}$ są funkcjami relaksacji.

Po przekształceniach, z bilansu energii dla ośrodka wieloskładnikowego uzyskuje się dla izotropowego materiału równanie przepływu ciepła

$$\rho r_1 - \rho T_o \dot{S} + k_1 T_{,ii} = 0 . \tag{10}$$

W podobny sposób z równania ciągłości wyprowadza się równanie przepływu masy

$$\rho r_2 - \rho \dot{c} + k_2 M_{,ii} = 0 . \tag{11}$$

Uzupełnienie tych równań stanowią równania ruchu w przemieszczeniach

$$\sigma_{ji,j} + \rho X_i = \rho \ddot{u}_i . \tag{12}$$

Wówczas dla izotropowego ośrodka ciągłego układ równań (10)-(12) opisujący proces termodyfuzji lepkosprężystej w ośrodku ciągłym przyjmuje postać:

$$\begin{gathered} (\mu)*du_{i,jj} + (\lambda+\mu)*du_{j,ji} + \rho X_i = \rho\ddot{u}_i + \gamma_S*dS_{,i} + \gamma_C*dc_{,i}, \\ \rho T_o\dot{S} - k_1\left[\varphi*du_{j,j} + \mathbf{m}*dS + \mathbf{l}*dc\right]_{,ii} = \rho r_1, \\ \rho\dot{c} - k_2\left[\psi*du_{j,j} + \mathbf{l}*dS + \mathbf{n}*dc\right]_{,ii} = \rho r_2 . \end{gathered} \tag{13}$$

W przypadku ośrodka mikropolarnego do równań (10)-(12) należy dołączyć równanie ruchu w obrotach

$$\in_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + JY_i = J\ddot{\varphi}_i . \tag{14}$$

Dla ośrodka mikropolarnego z centralną symetrią, uwzględniając symetrię funkcji relaksacji uzyskuje się następujący komplet równań dla termodyfuzji lepkosprężystej:

$$
\begin{gathered}
(\mu+\phi)* du_{i,jj} + (\lambda+\mu-\phi)* du_{j,ji} + 2\alpha * \in_{ijk} d\varphi_{k,j} + \rho X_i = \\
= \rho \ddot{u}_i + \gamma_S * dS_{,i} + \gamma_C * dc_{,i}, \\
(\gamma+\kappa)* d\varphi_{i,jj} + (\beta+\gamma-\kappa)* d\varphi_{j,ji} + 2\beta * \in_{ijk} du_{k,j} + JY_i = J\ddot{\varphi}_i + 2\alpha\,\varphi_i, \qquad (15) \\
\rho T_o \dot{S} - k_1 \left[\varphi * d\gamma_{jj} + \overline{\varphi} * d\chi_{jj} + \mathbf{m} * dS + \mathbf{l} * dc\right]_{,ii} = \rho r_1, \\
\rho \dot{c} - k_2 \left[\psi * d\gamma_{jj} + \overline{\psi} * d\chi_{jj} + \mathbf{l} * dS + \mathbf{n} * dc\right]_{,ii} = \rho r_2 .
\end{gathered}
$$

4. Podsumowanie

Układ równań opisujących przepływy termodyfuzyjne w ośrodku o własnościach mikropolarnych w swojej strukturze ma budowę analogiczną jak dla ośrodka ciągłego. Różnice tkwią w członach wynikających z mikropolarnej struktury materiału. Ponadto w skład układu równań wchodzi dodatkowe równanie, opisujące ruch obrotowy. Należy zwrócić uwagę, iż wszystkie człony w równaniach klasycznej lepkosprężystości (13) występują w równaniach (15).

LITERATURA

[1] Kubik J.: Thermodiffusion in viscoelastic solids, Studia Geotech. Et Mech. 8, 2, 1986

[2] Nowacki W.: Teoria niesymetrycznej sprężystości, PWN Warszawa 1971

[3] Wieczorek B.: The model of the multicomponent and micropolar body, 3rd International Conference “New Trends in Statics and Dynamics of Buildings”, Bratislava 2004

[4] Wieczorek B.: The physical equations of the thermodiffusion for the multicomponent and micropolar body, 3rd International Conference “New Trends in Statics and Dynamics of Buildings”, Bratislava 2004

[5] Wilmański K.: Podstawy termodynamiki fenomenologicznej, PWN W-wa 1974

ANALOGY BETWEEN EQUATIONS OF THERMODIFFUSION PROCESS IN THE CONTINUOUS MEDIUM AND THE MICROPOLAR MEDIUM

Summary

In the paper are presented the formulation thermodiffusion problems in viscoelastic solid with multicomponent body. There is analysed the model of the continuous medium and the micropolar medium. The balance of mass, momentum, angular momentum, energy and entropy in a solid are proposed for each of the ingredients. Next, the balance equations are obtained for the body. The physical equations of the process are obtained assuming the thermodynamic potentials. Next, the final systems of equations are obtained which describe a character of mutual reaction of heat, diffusion and stress fields.