ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 8/2008
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

SYMETRIA PRZEPŁYWÓW JONOWYCH

Andrzej KUCHARCZYK, Jan KUBIK
Politechnika Opolska, Opole

1. Wprowadzenie

W typowych materiałach budowlanych tj. ceramice, betonach lub zaprawach z powodu porowatej struktury wewnętrznej dochodzi do wypełniania sieci kapilar roztworami elektrolitów. Są to głównie roztwory soli. W wyniku przepływu tych roztworów przez materiał dochodzi do adsorpcji jonów na jego powierzchni wewnętrznej, co jest przyczyną występowania szeregu zjawisk elektrokinetycznych, tj. potencjału przepływu, osmozy. Oszacowanie wpływu tych procesów na przepływy jonowe jest przedmiotem poniższej analizy. W referacie podjęto próbę wyznaczenia współczynnika przepływu kapilarnego roztworów jonowych przy wykorzystaniu symetrii równań bilansu masy i ładunku elektrycznego.

2. Równania przepływów

Analizie podlegają przepływy jonowe zachodzące w materiałach porowatych. Do opisu wykorzystano równania parcjalnych bilansów masy i ładunku elektrycznego [1, 2]

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + div\left(\rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha\right) = \rho^\alpha R^\alpha \,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho^\alpha e^\alpha}{\partial t} + div\left(\rho^\alpha e^\alpha \mathbf{v}^\alpha\right) = \rho^\alpha e^\alpha R^\alpha \,. \tag{2}$$

Po zsumowaniu powyższych bilansów, przy założeniach

$$\begin{gathered} \mathbf{v}^\alpha = \mathbf{w} + \mathbf{u}^\alpha \,,\ \rho \mathbf{w} = \sum_\alpha \rho^\alpha \mathbf{v}^\alpha \,, \\ \sum_\alpha \rho^\alpha R^\alpha = 0 \,,\ \sum_\alpha \rho^\alpha e^\alpha R^\alpha = 0 \,,\ \rho = \sum_\alpha \rho^\alpha \,,\ \rho e = \sum_\alpha \rho^\alpha e^\alpha \,, \\ \mathbf{j}^\alpha = \rho^\alpha \mathbf{u}^\alpha \,, \mathbf{J} = \sum_\alpha e^\alpha \mathbf{j}^\alpha \end{gathered} \tag{3}$$

otrzymano zasady: zachowania masy oraz ładunku elektrycznego

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\,\mathbf{w}) = 0\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + div(\rho e\,\mathbf{w} + \mathbf{J}) = 0\,. \tag{5}$$

3. Symetria równań przepływów

Podobieństwo zasad zachowania masy i ładunku elektrycznego pozwala na zbadanie symetrii tych równań [3]. Przemnażając splotowo powyższe równania, tj. równanie (4) przez ρe a równanie (5) przez ρ otrzymujemy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} * \rho e + div(\rho\,\mathbf{w}) * \rho e = 0\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} * \rho + div(\rho e\,\mathbf{w} + \mathbf{J}) * \rho = 0\,, \tag{7}$$

gdzie $f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau) d\tau$.

Korzystając z właściwości pochodnej splotu

$$\frac{d}{dt}\left[f_1 * f_2 \right] = \frac{df_1}{dt} * f_2 = f_1 * \frac{df_2}{dt} \tag{8}$$

oraz porównując równania (6) i (7) uzyskano

$$div(\rho\,\mathbf{w}) * \rho e = div(\rho e\,\mathbf{w} + \mathbf{J}) * \rho\,. \tag{9}$$

Całkując powyższe równanie po objętości i stosując twierdzenie Gaussa uzyskujemy

$$\begin{aligned} &\int_A (\rho\,\mathbf{w} * \rho e)\mathbf{n} dA - \int_V [\rho\,\mathbf{w} * grad(\rho e)]\, dV = \\ &= \int_A [(\rho e\,\mathbf{w} + \mathbf{J}) * \rho]\mathbf{n} dA - \int_V [(\rho e\,\mathbf{w} + \mathbf{J}) * grad\,\rho]\, dV. \end{aligned} \tag{10}$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymano następującą zależność

$$\begin{aligned} &\int_A \int_0^t \rho\,\mathbf{w}(t-\tau)\rho e(\tau)\mathbf{n} d\tau\, dA - \int_V \int_0^t \rho\,\mathbf{w}(t-\tau)\, grad\,\rho e(\tau)\, d\tau\, dV = \\ &= \int_A \int_0^t \Big(\rho e\,\mathbf{w}(t-\tau) + \mathbf{J}(t-\tau) \Big) \rho(\tau)\mathbf{n} d\tau\, dA - \int_V \int_0^t \Big(\rho e\,\mathbf{w}(t-\tau) + \mathbf{J}(t-\tau) \Big) grad\,\rho(\tau) d\tau\, dV. \end{aligned} \tag{11}$$

Ważnym przypadkiem szczególnym jest stały ładunek oraz stała gęstość na powierzchni A, czyli $\rho e = \rho e(0_+)H(t)$, $\rho = \rho(0_+)H(t)$. Wprowadzając te uproszczenia równanie powyższe można przekształcić następująco

$$
\begin{aligned}
&\rho e(0_+)\int_A \int_0^t [\rho \mathbf{w}(t-\tau)H(\tau)]\mathbf{n}\, d\tau\, dA - \int_V \int_0^t [\rho \mathbf{w}(t-\tau)\, grad\, \rho e(\tau)]\, d\tau\, dV = \\
&= \rho(0_+)\int_A \int_0^t \left[\left(\rho e\, \mathbf{w}(t-\tau) + \mathbf{J}(t-\tau)\right) H(\tau)\right]\mathbf{n}\, d\tau\, dA - \\
&- \int_V \int_0^t \left[\left(\rho e\, \mathbf{w}(t-\tau) + \mathbf{J}(t-\tau)\right) grad\, \rho(\tau)\right] d\tau\, dV.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Powyższa tożsamość przedstawia ograniczenia na przepływy masy i ładunku elektrycznego w ośrodku porowatym.

4. Równania fizyczne

Występujące w tożsamości (12) wyrażenia mają postać

$$
\begin{aligned}
&\rho e\, \mathbf{w} + \mathbf{J} = -\kappa\, grad\, \varphi, \\
&\rho\, \mathbf{w} = -K\, grad\, p,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

liniowych równań zależnych od potencjału elektrycznego i ciśnienia kapilarnego. Podstawiając (13) do (12) uzyskujemy

$$
\begin{aligned}
&-\rho e(0_+)K\int_A \int_0^t [grad\, p(t-\tau)H(\tau)]\mathbf{n}\, d\tau\, dA + K\int_V \int_0^t [grad\, p(t-\tau)\, grad\, \rho e(\tau)]\, d\tau\, dV = \\
&= -\rho(0_+)\kappa\int_A \int_0^t [grad\, \varphi(t-\tau)\, H(\tau)]\mathbf{n}\, d\tau\, dA + \kappa\int_V \int_0^t [grad\, \varphi(t-\tau)\, grad\, \rho(\tau)]\, d\tau\, dV.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Z powyższego równania, przy znanym K, otrzymujemy oszacowanie współczynnika przepływu elektrolitu w procesach przepływów jonowych

$$
\frac{K}{\kappa} = \frac{\int_V \int_0^t [grad\, \varphi(t-\tau)\, grad\, \rho(\tau)]\, d\tau\, dV - \rho(0_+)\int_A \int_0^t [grad\, \varphi(t-\tau)\, H(\tau)]\mathbf{n}\, d\tau\, dA}{\int_V \int_0^t [grad\, p(t-\tau)\, grad\, \rho e(\tau)]\, d\tau\, dV - \rho e(0_+)\int_A \int_0^t [grad\, p(t-\tau)H(\tau)]\mathbf{n}\, d\tau\, dA}. \tag{15}
$$

Oznaczenie symboli

e – ładunek elektryczny, electrical charge, [C],
$\mathbf{j}^{\alpha}$ – dyfuzyjny strumień masy, diffusion flux of mass, [kg/(m^2·s],
$\mathbf{J}^{\alpha}$ – strumień dyfuzyjny ładunku, diffusion flux of charge, [C·kg/(m^2·s)],
K – współczynnik przepływu kapilarnego, capillary conductivity coefficients, [s],
p – ciśnienie kapilarne, capillary pressure, [Pa],
$\mathbf{u}^{\alpha}$ – prędkość dyfuzyjna, diffusion velocity, [m/s],
$\mathbf{v}^{\alpha}$ – prędkość parcjalna, partial velocity, [m/s],
$\mathbf{w}$ – prędkość barycentryczna, barycentric velocity, [m/s],
ρ – gęstość masy, mass density, [kg/m^3],
$\rho^{\alpha} R^{\alpha}$ – źródło masy, mass source, [kg/(m^3·s)],
$\rho^{\alpha} e^{\alpha} R^{\alpha}$ – źródło ładunku elektrycznego, source of electrical charge, [C·kg/(m^3·s)],
κ – współczynnik przewodności elektrycznej, electrical conductivity, [(A/V)·(kg/m)],
φ – potencjał elektryczny, electrical potential, [V];

Literatura

[1] Ali A. R., Zybura A.: Applications of thermomechanics equations in describing chloride extraction from concrete, Transport in Porous Media 72, 2008
[2] Jędrzejczyk-Kubik J.: Termomechanika przepływów jonowych, RIB, z. 2, Opole, 2001
[3] Kubik J.: Reciprocity theorem in coupled problems of viscoelastic thermodiffusion, Acta Mech. 50, 1984

Praca współfinansowana ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego w ramach projektu badawczego promotorskiego PBP-3981/B/T02/2008/35

SYMMETRY OF IONS FLOWS

Summary

The symmetry of equations of mass and electrical charge was analyzed. From these equations the correlation of the flows of mass and ions in the porous medium was estimated. This expression can be used to determine the coefficient of conductivity of ions in porous medium.