ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 9/2009
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ANALIZA MES-MKEB NIELINIOWEGO PROBLEMU WSPÓŁDZIAŁANIA BUDOWLI Z PODŁOŻEM GRUNTOWYM

Paweł FEDCZUK
Politechnika Opolska, Opole

1. Wprowadzenie

Konieczność rewitalizacji obiektów budowlanych wymaga poprawienia trwałości ich konstrukcji, wymuszając zastosowanie do projektowania metod obliczeniowych dokładniej modelujących zarówno ich zachowanie (jako całych ustrojów, a nie tylko wyodrębnionych fragmentów), jak i złożone własności mechaniczne materiałów (użytych do ich budowy). Zwykle do tego celu wykorzystuje się klasyczne metody numeryczne takie jak: metoda elementów skończonych MES [1] i elementów brzegowych MEB [2], natomiast rzadziej – ich kombinacje.

W pracy prezentuje się uogólnienie koncepcji [3] zastosowania kombinacji metod: elementów skończonych (MES) i kontaktowych elementów brzegowych (MKEB) do analizy zachowania obciążonej konstrukcji budowlanej. Formalnie – analizuje się 3-D zagadnienie współpracy układu „budowla-fundament-podłoże gruntowe" (uwzględniające sprężysto-plastyczne własności materiałów zastosowanych do jego wykonania). Ustrój budowla-fundament modeluje się zgodnie z zasadami MES [1], natomiast podłoże gruntowe – w sposób właściwy dla metody kontaktowych elementów brzegowych. MKEB [3, 4] stanowi odmianę klasycznej wersji MEB [2], gdzie rozwiązanie Kelvina dla przestrzeni sprężystej zastępuje kombinacja rozwiązań problemów Boussinesqa i Ceruttiego dla jednorodnej półprzestrzeni sprężystej.

Ze względu na ograniczone rozmiary opracowania, jego zakres obejmuje elementarne podstawy teoretyczne tej metody takie jak: zarys sformułowania globalnego równania równowagi układu oraz prezentacja sposobu jego rozwiązania, wykorzystującego technikę przyrostowo-iteracyjną, opartą na zmodyfikowanej metodzie Raphsona-Newtona [4, 5].

2. Założenia upraszczające

Zakłada się, że budowla spoczywa na fundamencie bezpośrednim, posadowionym w podłożu gruntowym, modelowanym jednorodną półprzestrzenią. Powierzchnię jego kontaktu z podłożem aproksymuje układ regularnych prostokątów. Budowlę i fundament dyskretyzuje się zgodnie z zasadami MES [1], zastępując je układem elementów skończonych, natomiast podłoże – stosownie do zasad MKEB [2, 3, 4], wycinając z półprzestrzeni regularną bryłę (np. prostopadłościan) o wymiarach dostosowanych do rozmiarów budowli. Powierzchnię brzegową wyciętej bryły w obszarze kontaktu z fundamentem dzieli się na regularny układ prostokątnych brzegowych elementów kontaktowych o środkach pokrywających się z węzłami elementów MES, tworzących strukturę fundamentu. Jej wnętrze modeluje struktura regularnych komórek (np. prostopadłościennych cel o jednym węźle umieszczonym w środku), skoordynowana z siatką elementów brzegowych.

3. Przyrostowe sformułowanie problemu

Każdy ze składników układu „budowla-fundament-podłoże" rozpatrywany jest oddzielnie, stosownie do przyjętej metody analizy. Budowla i fundament analizowane są w sposób właściwy dla MES, natomiast podłoże – zgodnie z zasadami MKEB.

Zastosowanie MES [1] do analizy układu „budowla-fundament" (uwzględniające przyrostowe równanie konstytutywne sprężysto-plastyczności) daje wyjściową postać równania prac przygotowanych. Użycie MKEB [3, 4] do analizy podłoża z uwzględnieniem podziału przyrostu deformacji na części sprężystą i plastyczną oraz oddzielnym ich zdefiniowaniem [3], daje kompletne równanie, określające przyrost uogólnionego przemieszczenia $d\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ w punkcie $\boldsymbol{\xi}$ brzegu półprzestrzeni (wywołanego przyrostem obciążenia $d\mathbf{q}(\mathbf{x})$ w punkcie $\mathbf{x}$ płaszczyzny granicznej). Uzupełnia je uogólniona zależność transformacyjna [3, 4]. Tworzą one razem zestaw zależności

$$\delta\mathbf{u}^T d\,\mathbf{P} + \int_{(S)} \delta\mathbf{u}_B^T d\,\mathbf{p}\,dS = \int_{(V)} \{\mathbf{L}_B[\delta\mathbf{u}_B(\mathbf{x})]\}^T \mathbf{D}_B^e\,\mathbf{L}_B\,d\mathbf{u}_B dV - \int_{(V)} \{\mathbf{L}_B[\delta\mathbf{u}_B(\mathbf{x})]\}^T d\,\boldsymbol{\sigma}_B^p\,dV \tag{1}$$

$$d\mathbf{u}(\xi) = d\mathbf{u}^e(\xi) + d\mathbf{u}^p(\xi) = \int_{(A)} [\mathbf{G}(\mathbf{x},\xi)]^T d\mathbf{q}(\mathbf{x})\,dA + \int_{(V)} [\mathbf{C}(\mathbf{z},\xi)]^T d\boldsymbol{\sigma}'^p(\mathbf{z})\,dV, \;\; d\mathbf{u}_B(\mathbf{x}) = \mathbf{T}d\mathbf{u}(\mathbf{x})$$

gdzie: $\delta\mathbf{u}$, $\delta\mathbf{u}_B$ oznaczają uogólnione wirtualne przemieszczenia węzłowe i „powierzchniowe", $d\mathbf{P}$, $d\mathbf{p}$ – przyrosty uogólnionego obciążenia skupionego i powierzchniowego, a $d\mathbf{u}_B$, $d\boldsymbol{\sigma}^p{}_B$ – przyrosty składników układu: węzłowego przemieszczenia i plastycznej części naprężenia. $\mathbf{L}_B$ i $\mathbf{D}_B{}^e$ to odpowiednio operator macierzowy pochodnych i macierz konstytutywna sprężystości. Składowymi macierzy Greena $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ są rozwiązania zagadnień Boussinesqa i Ceruttiego. Macierz przemieszczeń $\mathbf{C}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ definiuje operacja $\mathbf{LG}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ (gdzie $\mathbf{L}$ to macierzowy operator pochodnych), $d\boldsymbol{\sigma}'^p(\mathbf{x})$ oznacza plastyczny przyrost naprężenia, a $\mathbf{T}$ – macierz transformacji.

4. Równanie równowagi układu

Zastosowanie do zdyskretyzowanej struktury „budowla-fundament" standardowych formuł MES na uogólnione przemieszczenie $\mathbf{u}_B(\mathbf{x})$ i macierz odkształceń $\mathbf{B}_B(\mathbf{x})$, oraz zastąpienie obciążenia powierzchniowego $d\mathbf{p}$ ekwiwalentnym skupionym prowadzi do końcowego równania równowagi MES dla pary składników układu

$$d\,\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{K}_B d\mathbf{u}_B - d\,\mathbf{F}_{d\sigma_p} \qquad d\,\overline{\mathbf{P}} = d\,\mathbf{P} + \int_{(S)} d\,\mathbf{p}\,dS \qquad d\,\mathbf{F}_{d\sigma_p} = \int_{(S)} \mathbf{B}_B^T d\boldsymbol{\sigma}_B^p\,dS \tag{2}$$

w którym: $d\,\overline{\mathbf{P}}$, $d\,\mathbf{F}_{d\sigma_p}$ – to wektory obciążeń węzłów struktury i residualnych, $\mathbf{K}_B$ – globalna macierz sztywności obu składników.

W przypadku podłoża rozwiązanie wymaga oddzielnego potraktowania części sprężystej i plastycznej końcowego równania (1.b). Wyrażenie przyrostu obciążenia $d\mathbf{q}(\mathbf{x})$ w dowolnym elemencie kontaktowym (k) typową dla MES formułą interpolacyjną dla j jego węzłów, przekształca pierwszą część tej relacji w zależność określającą liniowo-sprężystą część przyrostu przemieszczenia w węźle elementu kontaktowego (i). Plastyczną część przemieszczenia w węźle elementu kontaktowego (i) określa druga część zależności (1.b), zsumowana dla wszystkich sąsiadujących komórek (h). Daje to parę relacji

$$d\mathbf{u}_i^e = \sum_{(j)} \mathbf{A}_{ij}\, d\,\mathbf{q}_j \qquad d\,\mathbf{\Psi}_i = d\mathbf{u}_i^p = \sum_{(h)} \int_{(V_h)} [\mathbf{C}(\mathbf{z},\xi_i)]^T\, d\boldsymbol{\sigma}'^p(\mathbf{z})\, dV_h \tag{3}$$

gdzie $\mathbf{A}_{ij}$ oznacza elementarną macierz podatności podłoża. Ich złożenie w jedno równanie, uogólnienie go na wszystkie węzły struktury podłoża, oraz wstawienie przekształconego do zależności na przyrost sił węzłowych $d\mathbf{F}_g$ (uzyskanej z zasady prac przygotowanych), prowadzi do końcowego równania równowagi dla podłoża

$$d\mathbf{F}_g = \mathbf{K}_g\, d\mathbf{u} - d\mathbf{F}^p \qquad \mathbf{K}_g = \overline{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{\Lambda}\,\mathbf{A}^{-1} \qquad d\mathbf{F}^p = \mathbf{K}_g\, d\mathbf{\Psi} \tag{4}$$

w którym $\mathbf{K}_g$ to macierz sztywności podłoża, $d\mathbf{F}^p$ – plastyczna część przyrostu sił węzłowych, a $\mathbf{\Lambda}$ – macierz powierzchni brzegowych elementów kontaktowych.

Integracja całego układu „budowla-fundament-podłoże” wymaga wprowadzenia równań (2.a) i (4.a) do zależności wiążącej przyrost sił w węzłach układu $d\mathbf{R}$ jako równoważący sumę reakcji $d\,\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{T}\,d\mathbf{F}_g$, dając po przekształceniach końcowe równanie równowagi

$$\mathbf{K}\, d\,\mathbf{u}_B = d\mathbf{R} + d\mathbf{F}_{d\sigma_p} + d\overline{\mathbf{F}}^p \qquad \mathbf{K} = \mathbf{K}_B + \mathbf{T}\mathbf{K}_g\,\mathbf{T}^T \qquad d\overline{\mathbf{F}}^p = \mathbf{T}\, d\mathbf{F}^p \tag{5}$$

gdzie: $\mathbf{K}$ oznacza globalną macierz sztywności układu, $d\overline{\mathbf{F}}^p$ – sprowadzony przyrost sił węzłowych.

5. Procedura przyrostowo-iteracyjna

Do rozwiązania problemu współdziałania układu „budowla-fundament-podłoże”, zdefiniowanego równaniem (5.a), stosuje się technikę numeryczną, opartą na zmodyfikowanej metodzie Newtona-Raphsona. Jest to procedura przyrostowo-iteracyjna (rys. 1), wykorzystująca aktualizowaną co przyrost styczną macierz sztywności układu **K**. Części plastyczne przyrostów naprężeń i odkształceń dla sprężysto-plastycznych modeli ośrodków ustala się w krokach (5) i (6) za pomocą procedury Nayaka-Zienkiewicza [5].

6. Zakończenie

Przedstawiona koncepcja analizy MES-MKEB 3-D problemu współdziałania układu jest aktualnie wykorzystywana do „budowy” programu komputerowego, umożliwiającego jej praktyczne zastosowanie. Dalszy rozwój metody wymaga uwzględnienia niejednorodności geologicznej podłoża i możliwości miejscowej utraty kontaktu fundamentu z podłożem.

1	podział obciążenia $\mathbf{R}$ na szereg przyrostów $d\mathbf{R}_{i=1}^{(l)}$ (dla kroku przyrostowego l=1),
2	utworzenie (w iteracji i=1 kroku l) macierzy sztywności układu „budowla-fundament" $\mathbf{K}_B$, podłoża $\mathbf{K}_g$ i całego układu $\mathbf{K}$,
3	obliczenie przyrostów przemieszczeń i sił węzłowych, oraz aktualizacja ich całkowitych wartości,
4	wyznaczenie (w iteracji $i=i+1$) przyrostu naprężeń $d\boldsymbol{\sigma}'$ w środkach komórek podłoża (wywołanego obciążeniem elementów kontaktowych $d\mathbf{F}_g$) i odpowiadającego im przyrostu odkształceń $d\boldsymbol{\varepsilon}$ z prawa Hooke'a,
5	obliczenie (w środkach komórek podłoża) części plastycznej przyrostu naprężeń $d\boldsymbol{\sigma}'^p$ i odkształceń $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$, oraz przyrostu sił węzłowych $d\overline{\mathbf{F}}^p$ ($d\overline{\mathbf{F}}^p = \mathbf{T}[\mathbf{K}_g\,(\mathbf{C}\,d\boldsymbol{\sigma}'^p)]$),
6	określenie (w węzłach całkowania elementów układu „budowla-fundament") części plastycznej przyrostu naprężeń $d\boldsymbol{\sigma}^p{}_B$ i odkształceń $d\boldsymbol{\varepsilon}^p{}_B$, oraz wyznaczenie wektorów $d\,\mathbf{F}_{d\sigma_p}$ i $d\mathbf{R}_i^{(l)}$ ($d\mathbf{R}_i^{(l)} = d\mathbf{F}_{d\sigma_p} + d\overline{\mathbf{F}}^p$),
7	obliczenie przyrostów przemieszczeń i sił węzłowych, oraz aktualizacja ich całkowitych wartości,
8	sprawdzenie warunku zbieżności obliczeń $\lVert d\mathbf{u}_B{}^i \rVert \le \tau$, ($\tau$ – stała rzędu 10^{-2} – 10^{-6}), wymagającego w przypadku: (a) niespełnienia – realizacji obliczeń od punktu (4) dla następnej iteracji, (b) spełnienia – kontynuacji obliczeń od punktu (2) (w kroku $l=l+1$) dla następnego przyrostu obciążenia $d\mathbf{R}_{i=1}^{(l)}$ (lub ich zakończenia), poprzedzona aktualizacją parametrów modeli.

Rys. 1. Algorytm procedury przyrostowo-iteracyjnej.
Fig. 1. Algorithm of step-iterative procedure.

Literatura

[1] Zienkiewicz O. C., Taylor R.L.: The Finite Element Method, Fourth Edition, Vol. 1 & 2, McGraw-Hill Book Company, London 1991.
[2] Banerjee P. K., Butterfield R.: Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill Book Company, London 1981.
[3] Gryczmański M.: Metoda elementów kontaktowych i jej zastosowanie do obliczania belek na półprzestrzeni sprężysto-lepkoplastycznej, Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, Budownictwo z. 21, Nr 97/1984, Opole 1984, 128-139.
[4] Fedczuk P.: Ława fundamentowa na podłożu nieliniowo odkształcalnym, praca doktorska, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu, Opole 1992.
[5] Nayak G. C., Zienkiewicz O.C.: Elasto-plastic stress analysis. A generalized for various constitutive relations including strain softening, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.5, 1972, 113-135.

FEM-CBEM ANALYSIS OF NONLINEAR INTERACTION PROBLEM OF BUILDING AND SUBSOIL

Summary

The aim of the following paper is to present the concept of using a combined method (consisting of finite element method FEM and contact boundary element method CBEM) to analyze the 3-D interaction problem of system „building-foundation-subsoil" with consideration of elasto-plastic properties of its components. It comprises elementary theoretical basis, considering formulation of global equation of equilibrium, presentation of the method of solution this relation (using a step-iterative technique based upon the modified Raphson-Newton concept).