ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 11/2010
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

RELACJA WZAJEMNOŚCI W ZAGADNIENIU POCZĄTKOWO-BRZEGOWYM LINIOWEJ TERMOPIEZOELEKTRYCZNOŚCI

Piotr GORECKI, Jerzy WYRWAŁ
Politechnika Opolska, Opole

1. Wprowadzenie

W inżynierii budowlanej materiały piezoelektryczne znalazły swoje zastosowanie głównie w nieniszczącej ocenie stanu wyrobów i konstrukcji budowlanych [9]. Czujniki piezoelektryczne pozwalają na badanie pracy budowli w sposób ciągły (*structural health monitoring).* Sieć czujników mierzy takie wielkości jak deformacje czy aktywność sejsmiczną. Otrzymane dane pozwalają na szybką reakcję na ewentualne uszkodzenia konstrukcji.

Coraz częstsze zastosowanie materiałów piezoelektrycznych w warunkach zmiennej temperatury spowodowało wzrost zainteresowania zjawiskiem sprzężenia pola termicznego z efektem piezoelektrycznym [5, 6]. Zasady wzajemności w przypadku zagadnień piezoelektryczności i elektrostrykcji były analizowane i wykorzystywane przez autorów opracowań [2, 7, 8]. W niniejszej pracy wyprowadzono relacje wzajemności w przypadku kompletu równań zagadnienia początkowo-brzegowego liniowej termopiezolektryczności.

2. Zagadnienie początkowo-brzegowe liniowej termopiezoelektryczności

Podstawowe równania liniowej termopiezoelektryczności, w przypadku materiału anizotropowego, przedstawiają poniższe równania [1, 5],

$$a_{ijkl}u_{k,lj} + e_{kij}\Phi_{,kj} - \beta_{ij}\theta_{,j} + f_i = 0\,, \tag{1}$$

$$e_{kij}u_{i,jk} - c_{kj}\Phi_{,jk} + b_k\theta_{,k} - h = 0\,, \tag{2}$$

$$\beta_{ij}\dot{u}_{i,j} - b_k\dot{\Phi}_{,k} + \alpha\dot{\theta} - \frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,ij} = 0\,. \tag{3}$$

W powyższych zależnościach wielkości a_{ijkl}, c_{ij}, e_{kij}, k_{ij}, b_i, α, β_{ij} są współczynnikami materiałowymi, przecinek w dolnym indeksie oznacza pochodną cząstkową względem danej zmiennej (np. $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$), zaś kropka nad daną wielkością oznacza pochodną po czasie.

Występujące w powyższych zależnościach współczynniki materiałowe charakteryzują się następującymi symetriami [6]:

$$a_{ijkl} = a_{klij}\ ,\ c_{kj} = c_{jk}\ ,\ a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk}\ ,\ e_{kij} = e_{kji}\ ,\ \beta_{ij} = \beta_{ji}\ . \tag{4}$$

Zjawisko piezoelektryczności opisują zatem 3 równania tensorowe z 3 niewiadomymi (u_i, Φ, θ).

Do powyższych równań należy dołączyć warunki brzegowe:

$$u_i = \hat{u}_i \text{ na } \partial B_u\ , \tag{5}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \left(a_{ijkl} u_{k,l} + e_{kij} \Phi_{,k} - \beta_{ij} \Theta\right) n_j = p_i = \hat{p}_i \text{ na } \partial B_\sigma \quad \partial B_u \cup \partial B_\sigma = \partial B\ , \tag{6}$$

$$\Phi = \hat{\Phi} \text{ na} \partial B_\Phi\ , \tag{7}$$

$$D_k n_k = \left(e_{kij} u_{i,j} - c_{kj} \Phi_{,j} + p_k \Theta\right) n_k = D = \hat{D}\ na \partial B_D \quad \partial B_\Phi \cup \partial B_D = \partial B\ , \tag{8}$$

$$\theta = \hat{\theta}\ na\ \partial B_\Theta\ , \tag{9}$$

$$q_i n_i = -k_{ij} \theta_{,j} n_i = q = \hat{q}\ na\ \partial B_q \quad \partial B_\theta \cup \partial B_q = \partial B\ , \tag{10}$$

gdzie: $\partial B_\alpha\ \left(\alpha = u, p, \Phi, D, \Theta, q\right)$– powierzchnia, do której jest przyłożona odpowiednia wielkość wynikająca z warunku brzegowego, $\hat{u}_i, \hat{p}_i, \hat{\Phi}, \hat{D}, \hat{\Theta}, \hat{q}$ to kolejno zadane na brzegu ciała: odkształcenie, siła powierzchniowa, potencjał elektryczny, ładunek elektryczny, temperatura i prostopadła do brzegu składowa wektora natężenia strumienia ciepła.

Komplet równań zagadnienia uzupełniają warunki początkowe

$$u_{i,j}\left(x_k, t=0\right) = \varepsilon_{ij}\ \left(x_k, t=0\right) = \breve{\varepsilon}_{ij} \quad w\ \ B\ , \tag{11}$$

$$\Phi_{,k}\ \left(x_k, t=0\right) = -E_k\left(x_k, t=0\right) = -\breve{E}_k \quad w\ \ B\ , \tag{12}$$

$$\theta\left(x_k, t=0\right) = \breve{\theta} \quad w\ \ B\ , \tag{13}$$

gdzie: $\breve{\varepsilon}_{ij}, \breve{E}_k, \breve{\theta}$ – wartości początkowe odkształcenia, potencjału elektrycznego i temperatury.

3. Operatorowa postać zagadnienia początkowo-brzegowego

W celu uproszczenia dalszych rozważań i uczynienia ich bardziej klarownymi, równania (1-3) i (5-13) zostaną przedstawione w następującej, zwartej postaci operatorowej (macierzowej):

$$\mathbf{A}\,\mathbf{u} + \mathbf{f} = 0\ , \qquad \mathbf{A}: E \to E',\ \mathbf{u} \in E,\ \mathbf{f} \in E'\ , \tag{14}$$

gdzie wektory (macierze kolumnowe) wielkości poszukiwanych i danych zdefiniowane są jako:

$$\mathbf{u} = \left[u_i, \Phi, \theta; u_i, p_i, \Phi, D, \theta, q; u_i, \theta, \Phi, \theta, \theta, \theta\right]^T\ , \tag{15}$$

$$\mathbf{f} = \left[-f_i, h, 0, -\hat{p}_i, \hat{u}_i, -\hat{D}, \hat{\Phi}, -\hat{q}/T_o, \hat{\theta}/T_o, 0, \beta_{ij}\breve{\varepsilon}_{ij}, 0, b_k \breve{E}_k, 0, \alpha\breve{\theta}\right]^T\ , \tag{16}$$

zaś niezerowe elementy operatora (macierzy kwadratowej) **A** mają postać:

$$
\begin{gathered}
A_{11}=-a_{ijkl}\delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_j},\ A_{12}=-e_{kij}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j},\ \ A_{13}=\beta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j},\\
A_{21}=-e_{kij}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k},\ \ A_{22}=c_{kj}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k},\ \ A_{23}=-b_k\frac{\partial}{\partial x_k},\\
A_{31}=-\beta_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j},\ A_{32}=b_k\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_k},\ A_{33}=-\alpha\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{T_0}k_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j},\\
A_{45}=-A_{54}=1,\ \ A_{67}=-A_{76}=1,\ \ A_{89}=-A_{98}=\frac{1}{T_0},\\
A_{(11)(10)}=-\beta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j},\ A_{(13)(12)}=b_k\frac{\partial}{\partial x_k},\ A_{(15)(14)}=-\alpha,
\end{gathered}
\tag{17}
$$

przy czym *E* oznacza przestrzeń Hilberta, zaś *E’* jest przestrzenią sprzężoną z *E*.

4. Symetria operatora zagadnienia początkowo-brzegowego liniowej termopiezoelektryczności

W celu wykazania symetrii operatora równania (14) należy go zapisać w następującej, alternatywnej postaci:

$$\left\langle \mathbf{Au},\mathbf{v}\right\rangle+\left\langle \mathbf{f},\mathbf{v}\right\rangle=0, \tag{18}$$

gdzie $\left\langle \cdot,\cdot \right\rangle_E$ oznacza dwuliniową formę $E'\times E$ przedstawioną jako suma następujących całek:

$$\left\langle \mathbf{f},\mathbf{u}\right\rangle_E=\sum_{I=1}^{2}\int_B f_I*du_I\,dV+\int_B f_I*u_I\,dV+\sum_{I=4}^{9}\int_{\partial B} f_I*du_I\,dA+\sum_{I=10}^{15}\int_B f_I\left(x_k,0\right)u_I\,dV\ . \tag{19}$$

W powyższym wzorze symbole $f*dg$ i $f*g$ oznaczają odpowiednio splot Stieltiesa i splot funkcji f i g zdefiniowane jako:

$$f*dg=\int_{-\infty}^{t} f\left(t-\tau\right)dg\left(\tau\right), \tag{20}$$

$$f*g=\int_{0}^{t} f\left(t-\tau\right)g\left(\tau\right)d\tau, \tag{21}$$

przy czym właściwości mnożenia splotowego opisane są w [3].

Zdefiniowany wyżej operator macierzowy **A** będzie symetryczny, jeśli spełni następującą relację:

$$\left\langle \mathbf{Au}^1,\mathbf{u}^2\right\rangle_E=\left\langle \mathbf{Au}^2,\mathbf{u}^1\right\rangle_E. \tag{22}$$

Aby to wykazać, należy wykorzystać twierdzenie o dywergencji, z którego wynika, że

$$\begin{aligned}&\int_B [\ \left(-a_{ijkl}u_{k,lj}-e_{kij}\Phi_{,kj}+\beta_{ij}\theta_{,j}\right)*du_i+\left(-e_{kij}u_{i,jk}+c_{kj}\Phi_{,jk}-b_k\theta_{,k}\right)*d\Phi\ +\\ &\quad +\frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,ij}*\theta\ ]dV=\int_B [\ \left(a_{ijkl}u_{k,l}+e_{kij}d\Phi_{,k}-\beta_{ij}\theta\right)*du_{i,j}+\\ &\quad +\left(e_{kij}u_{i,j}-c_{kj}\Phi_{,j}+b_k\theta\right)*d\Phi_{,k}-\frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,j}*\theta_{,i}\ ]dV+\\ &\quad -\int_{\partial B}\left(p_i*du_i+D*d\Phi+\frac{1}{T_0}q*d\theta\right)dA\end{aligned} \tag{23}$$

oraz właściwości mnożenia splotowego, które pociągają za sobą następującą zależność:

$$\left(-\beta_{ij}\dot{u}_{i,j}+b_k\dot{\Phi}_{,k}-\alpha\dot{\theta}\right)*\theta=\left(-\beta_{ij}du_{i,j}+b_k d\Phi_{,k}-\alpha d\theta\right)*\theta+\beta_{ij}\breve{\varepsilon}\theta+b_k\breve{E}\theta+\alpha\breve{\theta}\theta\,. \tag{24}$$

Jak łatwo sprawdzić, z formuł (15-17) i (19), oraz zależności (23) i (24) wynika, że

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{Au}^1,\mathbf{u}^2\right\rangle &=\int_B [\ a_{ijkl}u_{k,l}{}^1*du_{i,j}{}^2+e_{kij}\Phi_{,k}{}^1*du_{i,j}{}^2+e_{kij}u_{i,j}{}^1*d\Phi_{,k}{}^2-\\ &-\beta_{ij}\theta^1*du_{i,j}{}^2-\beta_{ij}u_{i,j}{}^1*d\theta^2+c_{kj}\Phi_{,j}{}^1*d\Phi_{,k}{}^2-b_k\theta^1*d\Phi_{,k}{}^2-\\ &-b_k\Phi_{,k}{}^1*d\theta^2+\alpha\theta^1*d\theta^2-\frac{1}{T_0}k_{ij}\theta_{,j}{}^1*\theta_{,i}{}^2\ ]-\int_{\partial B_u}\left(u_i^1*dp_i^2+p_i^1*du_i^2\right)dA-\\ &-\int_{\partial B_\Phi}\left(\Phi^1*dD^2+D^1*d\Phi^2\right)dA-\frac{1}{T_0}\int_{\partial B_\theta}\left(\theta^1*q^2+q^1\theta^2\right)dA=\left\langle \mathbf{Au}^2,\mathbf{u}^1\right\rangle\end{aligned} \tag{25}$$

co dowodzi symetrii, zdefiniowanego wyżej relacjami (17), operatora (macierzy) zadania początkowo-brzegowego liniowej termopiezoelektryczności, zapisanego w alternatywnej postaci (18).

5. Relacja wzajemności w zagadnieniu początkowo-brzegowe liniowej termopiezoelektryczności

Aby wykazać relację wzajemności, jaka występuje w zagadnieniu początkowo brzegowym liniowej termopiezoelektryczności określonym układem równań (1-3) i (5-13), należy rozważyć dwa niezależne od siebie układy: zdefiniowanych formułą (16) przyczyn $\{\mathbf{f}^1,\mathbf{f}^2\}$ oraz określonych wzorem (15) skutków $\{\mathbf{u}^1,\mathbf{u}^2\}$. Oba układy przyczyn i skutków powinny spełniać równanie (18), a zatem:

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{Au}^1,\mathbf{u}^2\right\rangle+\left\langle \mathbf{f}^1,\mathbf{u}^2\right\rangle=0,\\ \left\langle \mathbf{Au}^2,\mathbf{u}^1\right\rangle+\left\langle \mathbf{f}^2,\mathbf{u}^1\right\rangle=0.\end{aligned} \tag{26}$$

Odjęcie obu powyższych równań stronami prowadzi do zależności:

$$\left\langle \mathbf{Au}^1, \mathbf{u}^2 \right\rangle - \left\langle \mathbf{Au}^2, \mathbf{u}^1 \right\rangle = \left\langle \mathbf{f}^1, \mathbf{u}^2 \right\rangle - \left\langle \mathbf{f}^2, \mathbf{u}^1 \right\rangle . \tag{27}$$

Ponieważ rozważany operator zagadnienia początkowo brzegowego jest symetryczny, czyli spełnia warunek (25), zatem symetria ta pociąga za sobą następującą relację:

$$\left\langle \mathbf{f}^1, \mathbf{u}^2 \right\rangle = \left\langle \mathbf{f}^2, \mathbf{u}^1 \right\rangle \tag{28}$$

zwaną też relacją (zasadą) wzajemności. Relacja ta w postaci jawnej przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}
&\int_B \left(-f_i^1 * du_i^2 + h^1 * d\Phi^2 \right) dV - \int_{\partial B_\sigma} \hat{p}_i^1 * du_i^2 dA + \int_{\partial B_u} \hat{u}_i^1 * dp_i^2 \, dA - \\
&- \int_{\partial B_D} \hat{D}^1 * d\Phi^2 dA + \int_{\partial B_\Phi} \hat{\Phi}^1 * dD^2 \, dA - \frac{1}{T_0} \int_{\partial B_q} \hat{q}^1 * d\theta^2 \, dA + \frac{1}{T_0} \int_{\partial B_\Theta} \hat{\theta}^1 * dq^2 \, dA + \\
&+ \int_B \left(\beta_{ij} \breve{\varepsilon}_{ij}{}^1 \theta^2 + b_k \breve{E}_k{}^1 \theta^2 + \alpha \breve{\theta}^1 \theta^2 \right) dV = \\
&\qquad = \int_B \left(-f_i^2 * du_i^1 + h^2 * d\Phi^1 \right) dV - \int_{\partial B_\sigma} \hat{p}_i^2 * du_i^1 dA + \int_{\partial B_u} \hat{u}_i^2 * dp_i^1 \, dA - \\
&\qquad - \int_{\partial B_D} \hat{D}^2 * d\Phi^1 dA + \int_{\partial B_\Phi} \hat{\Phi}^2 * dD^1 \, dA - \frac{1}{T_0} \int_{\partial B_q} \hat{q}^2 * d\theta^1 \, dA + \\
&\qquad + \frac{1}{T_0} \int_{\partial B_\Theta} \hat{\theta}^2 * dq^1 \, dA + \int_B \left(\beta_{ij} \breve{\varepsilon}_{ij}{}^2 \theta^1 + b_k \breve{E}_k{}^2 \theta^1 + \alpha \breve{\theta}^2 \theta^1 \right) dV .
\end{aligned} \tag{29}$$

6. Podsumowanie

W prezentowanym artykule wyprowadzono relację wzajemności w przypadku kompletu równań zagadnienia początkowo-brzegowego liniowej termopiezolektryczności. Otrzymana relacja może zostać wykorzystana do poszukiwania analitycznych i numerycznych rozwiązań (np. z wykorzystaniem metody elementów brzegowych [4]) wielu problemów naukowych i inżynierskich związanych z wykorzystaniem materiałów piezoelektrycznych.

Oznaczenia symboli

D_k wektor indukcji elektrycznej, electric displacement vector [C m^{-3}],

E_k wektor natężenia pola elektrycznego, electric field vector [V m^{-1}],

f_i wektor siły objętościowej, mechanical body force [N m^{-3}],

h ładunek elektryczny [C m^{-3}],

n_k wektor normalny do brzegu, unit outward normal vector,

q_k wektor natężenia strumienia ciepła, heat flux vector [W m^{-2}],

t zmienna przestrzenna, time [s],

T_0 temperatura początkowa, reference temperature [K],

u_i wektor przemieszczenia, elastic displacement vector [m],

x_k współrzędna przestrzenna, spatial position [m],

ε_{ij} tensor odkształcenia, symmetric strain tensor [-],

Φ potencjał elektryczny, electric potential [V],

η gęstość entropii, entropy density [JK^{-1} m^{-3}],

Θ przyrost temperatury, temperature increment [K],

σ_{ij} tensor naprężenia, symmetric stress tensor [Pa].

Literatura

[1] Gülay A., Dökmeci M. C., The consistent Midlin's thermopiezoelectric equations and the principle of virtual work, Mechanics Research Communications, 32, 2005, 115-119.

[2] Iesan D., On the microstretch piezoelectricity, International Journal of Engineering Sciences, 44, 2006, 819-829.

[3] Korn G. A., Korn T. M., Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York 1986.

[4] Kögl M., Gaul L., A boundary element method for transient piezoelectric analysis, Engineering Analysis with Boundary Elements, 24, 2000, 591-598.

[5] Mindlin R. D., On the equations of motion of piezoelectric crystals, in: N. I. Muskilishivili, Problems of continuum Mechanics, 70th Birthday Volume, SIAM, Philadelphia, 1961, 282-290.

[6] Nowacki W., Some general theorems of thermo-piezoelectricity, Journal of Thermal Stress, 1, 1978, 171-182.

[7] Pan E., Tonon F., Three-dimensional Green's functions in anisotropic piezoelectric solids, International Journal of Solids and Structures, 37, 2000, 943-958.

[8] Rzepka J., Teoretyczne podstawy zastosowania piezopolimerów do diagnostyki konstrukcji inżynierskich (rozprawa doktorska), Opole 2009.

[9] Tressler J.F., Alkoy S., Newham E., Piezoelectric Sensors and Sensor Materials, Journal of Electroceramics, 2, 4, 1998, 257-272.

RECIPROCITY RELATION IN BOUNDARY INITIAL VALUE PROBLEM OF LINEAR THERMOPIEZOELECTRICITY

Summary

The paper contains derivation of reciprocity theorem for initial-boundary value problem of linear thermopiezoelectricity. The results obtained in this work can become the theoretical basis to formulate the numerical solutions of different scientific and engineering problems connected with piezoelectric materials.