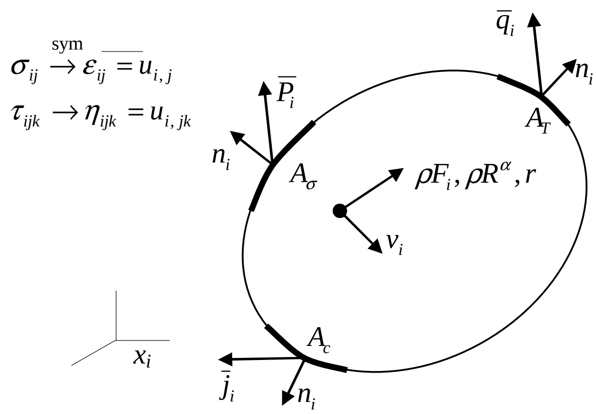
ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 10/2010
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

FUNKCJONAŁ LAGRANGE'A GRADIENTOWEJ TERMOMECHANIKI

Jan KUBIK
Politechnika Opolska, Opole

1. Wstęp

Celem opracowania jest podanie prostej metody budowania funkcjonałów typu Lagrange'a dla złożonych oddziaływań cieplnych, dyfuzyjnych i mechanicznych w gradientowej termomechanice. Wykorzystuje się tu podobieństwo formalne bilansów masy, pędu i energii. Problem opisuje układ równań pól mechanicznych, cieplnych i dyfuzyjnych przedstawionych na rysunku 1.



Rys. 1. Pola mechaniczne, cieplne i dyfuzyjne
Fig. 1. Mechanical, thermal and diffusive fields

2. Funkcjonał dla zadań mechanicznych

Wyjściowym punktem tych rozważań będą równania ruchu przemnożone przez prędkość cząski materialnej v, Równanie to po scałkowaniu stanowi podstawowa tożsamość energetyczną w mechanice

$$\int_V \left[\sigma_{ij,j} + \tau_{ijk,kj} + \rho\left(F_i - \dot{v}_i\right)\right] v_i \, dV = 0 . \tag{1}$$

Po przekształceniach funkcjonał na moc mechaniczną ma postać

$$\int_V \left[\left(\sigma_{ij} v_i\right)_{,j} - \sigma_{ij} v_{i,j} + (\tau_{ijk,k}, v_i)_{,j} - \tau_{ijk,k}\, v_{i,j} + \rho\left(F_i - \dot{v}_i\right) v_i\right] dV = 0 \,. \tag{2}$$

Otrzymana zależność jest zasadniczą równością energetyczną wykorzystywaną w rozważaniach mechanicznych. Jeżeli teraz zamienimy prędkość przez jej wirtualny przyrost spełniając przy tym ograniczenia matematyczne to otrzymamy tzw. Twierdzenie o pracach wirtualnych szeroko wykorzystywane w całej mechanice

$$\int_A (P_i + \tilde{P}_i)\delta v_i dA + \int_V \rho(F_i - v_i)\delta v_i dV = \int_V \sigma_{ij}\delta d_{ij} dV + \int_V \tau_{ijk}\delta v_{i,jk} dV + \int_A \tau_{ijk}\delta v_{i,j} n_k dA \,. \tag{3}$$

Kolejnym naturalnym krokiem jest podanie funkcjonału Lagrange'a

$$F(v_i) = \int_A (P_i + \tilde{P}_i) v_i\, dA + \int_V \rho\left(F_i - \dot{v}_i\right) v_i\, dV - \int_V \sigma_{ij} d_{ij}\, dV - \int_V \tau_{ijk} v_{i,jk} dV - \int_A (\tau_{ijk} v_{i,j}) n_k dA \,. \tag{4}$$

Którego wariacja jest wprost równaniem twierdzenia o mocach wirtualnych

$$\begin{gathered} \delta F = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \int_A (P_i + \tilde{P}_i)\delta v_i dA + \int_V \rho(F_i - v_i)\delta v_i dV = (\int_V \sigma_{ij}\delta d_{ij} dV + \int_V \tau_{ijk}\delta v_{i,jk} dV + \int_A \tau_{ijk}\delta v_{i,j} n_k dA. \end{gathered} \tag{5}$$

Dalej otrzymujemy równania ruchu oraz warunki brzegowe w naprężeniach jako równania Eulera-Lagrange'a funkcjonału (5)

$$\int_V \left\{ \left[\sigma_{ij,j} + \tau_{ijk,kj} + \rho\left(F_i - \dot{v}_i\right)\right]\delta v_i + \left[\sigma_{ij} - \sigma_{ij}\right]\delta v_{i,j} + \left[\tau_{ijk} - \tau_{ijk}\right]\delta v_{i,jk} \right\} dV = 0 \,. \tag{6}$$

3. Funkcjonał zadań dyfuzyjnych

Postępowanie w przypadku przepływów masy składnika jest analogiczne jak poprzednio. Wyjściowym równaniem jest lokalny bilans masy, który przemnażamy przez potencjał chemiczny M^{α} i całkujemy po całym obszarze ośrodka.

$$\int_V \left(\rho\dot{c}^{\alpha} - \rho R^{\alpha} + j^{\alpha}_{i,i}\right) M^{\alpha} dV = 0 \,. \tag{7}$$

W wyniku przytoczonych wyżej przekształceń uzyskaliśmy podstawową tożsamość energetyczną przepływów masy w ośrodku

$$\int_A j_i^{\alpha} M^{\alpha} n_i dA + \int_V \rho\left(\dot{c}^{\alpha} - R^{\alpha}\right) M^{\alpha} dV = \int_V j_i^{\alpha} M^{\alpha}_{,i} dV \,. \tag{8}$$

Zamiana potencjału chemicznego M na jego przyrost wirtualny prowadzi do odpowiednika twierdzenia o mocach wirtualnych w dyfuzji

$$\int_A j_i^{\alpha}\, \delta M^{\alpha} n_i dA + \int_V \rho\left(\dot{c}^{\alpha} - R^{\alpha}\right)\delta M^{\alpha} dV = \int_V j_i^{\alpha}\, \delta M^{\alpha}_{,i} dV \,. \tag{9}$$

Analogicznie funkcjonał $F(M)$ przyjmie postać

$$F(M) = \int_A j_i^{\alpha} M^{\alpha} n_i \, dA + \int_V \rho\left(\dot{c}^{\alpha} - R^{\alpha}\right) M^{\alpha} dV - \int_V j_i^{\alpha} M_{,i}^{\alpha} dV \; . \tag{10}$$

Uzyskaliśmy więc sytuację formalnie analogiczną jak w zadaniu mechanicznym.

4. Funkcjonał dla przepływów ciepła

Kolejne zjawisko składowe termodyfuzji w ciele odkształcalnym opisane jest równaniem przewodnictwa ciepła, które przemnażamy stronami przez temperaturę, która jest potencjałem tego procesu.

$$\int_V \left(\rho \dot{S} T_0 - \rho r + q_{i,i}\right) T \, dV = 0 \; . \tag{11}$$

Po przekształceniach otrzymujemy postawową tożsamość energetyczna związaną z przepływami ciepła

$$\int_A q_i T n_i \, dA + \int_V \rho\left(\dot{S} T_0 - r\right) T \, dV = \int_V q_i T_{,i} \, dV \; . \tag{12}$$

Podobnie jak poprzednio otrzymujemy kolejna, cieplna składową funkcjonału Lagranga'a termodyfuzji

$$F(T) = \int_A q_i T n_i \, dA + \int_V \rho\left(\dot{S} \, T_0 - r\right) T \, dV - \int_V q_i T_{,i} \, dV \; . \tag{13}$$

5. Funkcjonał dla termodyfuzji w ciele odkształcalnym

Podane poprzednio funkcjonaly składowe opisujące zjawiska mechaniczne oraz cieplno- dyfuzyjne po zsumowaniu prowadzą do ogólnego twierdzenia wariacyjnego termodyfuzji.

$$F = F\left(\varepsilon_{ij}\right) + \sum_{\alpha} F^{\alpha}\left(M^{\alpha}\right) + F(T) \rightarrow \tag{14}$$

$$\begin{aligned} F = F\left(v_i\right) &= \int_A \left(P_i + \tilde{P}_i \right) v_i \, dA + \int_V \rho\left(F_i - \dot{v}_i\right) v_i \, dV - \int_V \sigma_{ij} d_{ij} \, dV \\ &- \int_V \tau_{ijk} v_{i,jk} dV - \int_A \left(\tau_{ijk} v_{i,j} \right) n_k dA \\ &+ \sum_{\alpha} \left(\int_A j_i^{\alpha} M^{\alpha} n_i dA + \int_V \rho\left(\dot{c}^{\alpha} - R^{\alpha}\right) M^{\alpha} dV - \int_V j_i^{\alpha} M_{,i}^{\alpha} dV \right) \\ &+ \int_A q_i T n_i \, dA + \int_V \rho\left(\dot{S} T_0 - r\right) T \, dV - \int_V q_i T_{,i} \, dV . \end{aligned} \tag{15}$$

W formie poszerzonej dla ciała lepkosprężystego i warunków brzegowych na strumienie zachodzi

$$F = \int_A [(P_i + \tilde{P}_i) - (\overline{P}_i + \overline{P}_i)] * dv_i \, dA + \int_V \rho(F_i - \dot{v}_i) * dv_i \, dV - \int_V \sigma_{ij} * d(d_{ij}) dV -$$
$$\int_V \tau_{ijk} * d(v_{i,jk}) dV - \int_A \tau_{ijk} * dv_{i,j} \, n_k dA +$$
$$\sum_\alpha \left(\int_A (j_i^\alpha - \bar{j}_i^\alpha) * dM^\alpha n_i dA + \int_V \rho(\dot{c}^\alpha - R^\alpha) * dM^\alpha dV - \int_V j_i^\alpha * dM^\alpha_{,i} dV \right) + \tag{16}$$
$$+ \int_A (q_i - \overline{q}_i) * dTn_i \, dA + \int_V \rho(\dot{S}T_0 - r) * dT \, dV - \int_V q_i * dT_{,i} \, dV,$$

gdzie $f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(t-\tau) df_2$.

Należy tu dodać równania fizyczne procesu termodyfuzji, które są zależne od odkształceń ε_{ij} , temperatury T oraz stężeń c^α dyfundujących składników

W pracy symbolami $\sigma_{ij}, \tau_{ijk}, P_i, u_i, \varepsilon_{ij}, \eta_{ijk}, T, \rho r, q_i, \rho^\alpha, c^\alpha, M^\alpha, \rho R, j_i, U, K, S$ oznaczono kolejno: tensory i wektor naprężeń, przemieszczenia i odkształcenia, temperaturę, źródło i strumień ciepła, gęstość, stężenie, potencjał chemiczny, źródło i strumień masy, energię wewnętrzną i kinetyczną oraz entropię.

Literatura

[1] Radowicz A.: O roli efektów gradientowych w mechanice materiałów magnetycznych, I Kongres Nauki Polskiej, s. 187, Warszawa 2007.

LAGRANGE FUNCTIONAL IN GRADIENT THERMOMECHANICS

Summary

The aim of this paper is to providing a simple method to build a Lagrange functional for the complex interactions of thermal, mechanical and processes in the gradient thermomechanics. The formal similarity of the mass, momentum and energy balances is used.