ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 11/2011
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ZGINANE PRĘTY Z WARSTWĄ PIEZOELEKTRYCZNĄ

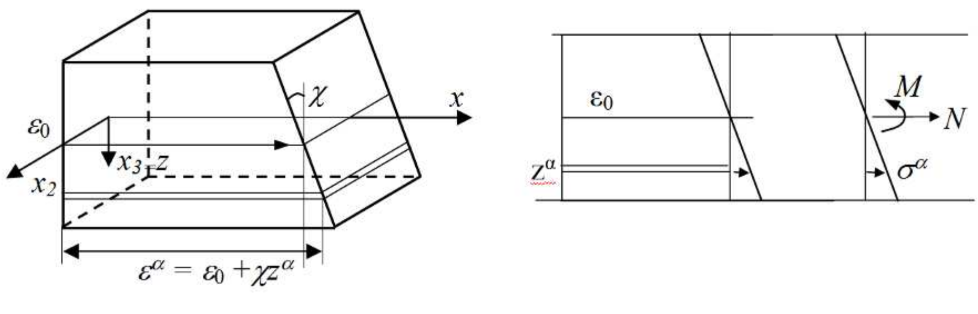
Joachim RZEPKA
Politechnika Opolska, Opole

1. Wstęp

W pracy będzie analizowane zginanie prętów z warstwą piezoelektryczną. Poprzez porównanie zginanego pręta warstwowego (z czujnikami piezoelektrycznymi) z prętem jednorodnym zostaną wyznaczone zastępcze funkcje materiałowe. Otrzymamy również związek między wartością lokalnego parametru uszkodzenia a wartością globalnego parametru uszkodzenia.

2. Zginanie pręta warstwowego oraz pręta jednorodnego (przypadek sprzężony)

Rozważania prowadzące do oceny uszkodzeń z twierdzenia o wzajemności dotyczą ośrodków jednorodnych. Jeżeli rozważania te mają dotyczyć zadań technicznych to należy podać sposób uśredniania od zadań niejednorodnych opisujących lokalne uszkodzenia do ekwiwalentnych jednorodnych. Przeanalizujemy w tym celu zginanie pręta warstwowego z czujnikami piezoelektrycznymi oraz porównawczo – piezoelektrycznego pręta jednorodnego.



Rys. 1. Pręt warstwowy piezoelektryczny
Fig. 1. Layered piezoelectric rod

W pręcie warstwowym problem opisuje układ równań fizycznych

$$\sigma_{ij}^{\alpha} = E_{ijkl}^{\alpha}\left(1-\lambda\right)\varepsilon_{kl}^{\alpha} + h_{ijk}^{\alpha} E_{k}^{\alpha} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n \, . \tag{1}$$

A w szczególności

$$\sigma_{11}^{(1)} = E^{e}_{1111}\varepsilon_{11} + h_{311}E_3 \qquad D_3 = h_{311}\varepsilon_{11} + g_{33}E_3 \quad \text{– piezowarstwa,} \tag{2}$$

$$\sigma^{(2)}{}_{11} = E_{1111}(1-\lambda)\varepsilon_{11} \text{ - warstwa uszkodzona,} \tag{3}$$

$$\sigma^{(3)}{}_{11} = E_{1111}\,\varepsilon_{11} \text{ - rdzeń nieuszkodzony,} \tag{4}$$

oraz geometrycznych

$$\varepsilon_{11} = \chi x_3 \,. \tag{5}$$

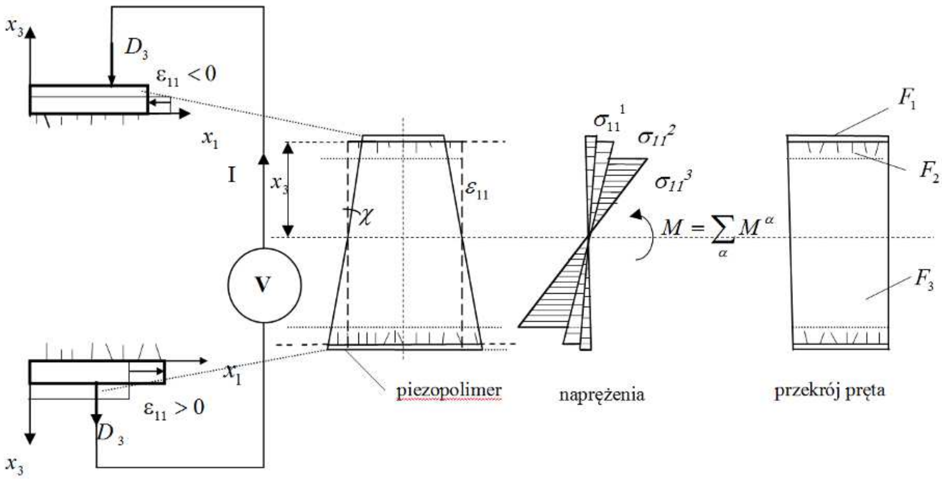
Równania te dotyczą piezoelektrycznej warstwy oraz konstrukcji, w której wystąpiły uszkodzenia λ. Moment zginający M w pręcie warstwowym określa relacja [1]:

$$M = \sum_{\alpha} \int_{F^{\alpha}} \sigma_{11}{}^{\alpha} x_3{}^{\alpha}\, dF^{\alpha} \equiv \int_{F^2} E_{1111}(1-\lambda)\chi(x_3)^2\, dF_2 + \int_{F^1} (E^{e}_{1111}\chi x_3 - h^{e}_{311}E_3)x_3\, dF_1 + \int_{F^3} E_{1111}\varepsilon_{11}x_3\, dF_3 \tag{6}$$

stąd

$$M = \chi E_{1111} I_3 + \chi(E_{1111}(1-\lambda)I_0 + E^{e}_{1111}\hat{I}) - h^{e}_{311}E_3\hat{S}, \tag{7}$$

gdzie: $I_0 = \int_{F^2} x_3{}^2 dF_2$, $\hat{I} = \int_{F^1} x_3{}^2 dF_1$, $I_3 = \int_{F^3} x_3{}^2 dF_3$, $\hat{S} = \int_{F^{\alpha}} x_3 dF_2$.



Rys. 2. Rozkład odkształceń i naprężeń w przypadku zginania pręta warstwowego
Fig. 2. Distribution of strains and stresses in the case of bending the layered rod

W analogicznym jednorodnym pręcie piezoelektrycznym zachodzi

$$\sigma_{11} = E_{1111}^{'}(1-\lambda^{'})\varepsilon_{11} - h_{311}^{'}E_3 \,, \tag{8}$$

stąd moment M^c wynosi

$$M^c = \int_F \sigma_{11} x_3 \, dF = \int_F (E_{1111}^{'}(1-\lambda^{'})\chi^{'}(x_3)^2 - h_{311}^{'} E_3 x_3) dF \,,$$

$$M^c = \chi^{'}(E_{1111}^{'} I^{'}(1-\lambda^{'}) - h_{311}^{'} E_3 S^{'}, \qquad gdzie \quad I^{'} = \int_F (x_3)^2 \, dF \,, \quad S^{'} = \int_F x_3 \, dF \,. \tag{9}$$

Z przyrównania (7) i (9) dla $M = M^c$ otrzymamy

$$\chi E_{1111} I_3 + \chi [E_{1111}(1-\lambda) I_0 + E_{1111}^{e} \hat{I}] - h_{311}^{e} E_3 \hat{S} = \chi^{'}(E_{1111}^{'} I^{'}(1-\lambda^{'}) - h_{311}^{'} E_3 S^{'} \tag{10}$$

Na początku procesu $\lambda = \lambda^{'} = 0,$ co dla $\chi = \chi^{'}$ prowadzi do równości

$$\begin{gathered} E_{1111} I_3 + E_{1111} I_0 + E_{1111}^{e} \hat{I} = E_{1111}^{e} I^{'} \rightarrow E_{1111}^{'} = [(I^{'})^{-1}(E_{1111} I_3 + E_{1111} I_0 + E_{1111}^{e} \hat{I})] \,, \\ h_{311}^{e} E_3 \hat{S} = h_{311}^{'} E_3 S^{'} \rightarrow h_{311}^{'} = (S^{'})^{-1} h_{311}^{e} \hat{S} \,, \\ S^{'} > S^{C} \rightarrow h^{'}{}_{311} < h^{e}{}_{311} \,, \quad \text{stąd} \quad \frac{h^{'}{}_{311}}{h^{c}{}_{311}} < 1 \,. \end{gathered} \tag{11}$$

W dalszych rozważaniach pomijamy składnik momentu zginającego dla warstwy piezoelektrycznej

$$h_{311}^{'} E_3 S \approx 0 \,, \quad h^{e}{}_{311} E_3 \hat{S} \approx 0 \,. \tag{12}$$

Z otrzymanych relacji wyznaczamy zastępcze funkcje materiałowe $E_{1111}^{'}$ *i* $h_{311}^{'}$ w pręcie jednorodnym, które analizowano w pracy. Istnieje też szansa na wyznaczenie parametru uszkodzenia λ.

Porównując momenty $M = M^c$ i krzywizny $\chi = \chi^{'}$ dla $\lambda \neq 0$ otrzymamy

$$E_{1111} I_3 + E_{1111}(1-\lambda) I_0 + E_{1111}^{e} \hat{I} = E_{1111}^{'}(1-\lambda^{'}) I^{'} \,. \tag{13}$$

Stąd

$$\lambda = \frac{E^{e}{}_{1111} \hat{I} + E^{'}{}_{1111}(1-\lambda^{'}) I^{'}}{E_{1111} I_0} + \frac{I_3}{I_0} + 1 \,. \tag{14}$$

Otrzymano więc współzależność parametrów uszkodzenia pręta zginanej konstrukcji λ od uszkodzenia $\lambda^{'}$ ekwiwalentnego pręta jednorodnego analizowanego w pracy.

W ten sposób rozważania prowadzone dla ośrodków jednorodnych można wykorzystać w analizie układów: konstrukcja – czujnik piezoelektryczny.

3. Indukcja elektryczna w zginanym pręcie warstwowym i jednorodnym

Podobne porównania przeprowadzimy dla wzoru na indukcję D_i w pręcie z warstwą piezoelektryczną oraz pręcie jednorodnym (por. rys. 2). Zachodzi

$$D_i = -h_{ijk}^{'}(1-\lambda^{'})\varepsilon_{jk} + g_{ij}E_j \,, \tag{15}$$

$$D_3^{(1)} = -h_{311}^{'}(1-\lambda^{'})\varepsilon_{11} \tag{16}$$

oraz

$$\varepsilon_{11} = \chi x_3 \,,\ D_i^{(2)} = 0 \,,\ D_i^{(3)} = 0 \,. \tag{17}$$

Wartość uśredniona

$$D_i = \frac{1}{F}\sum_{1}\int_{F^\alpha} D_i^{\alpha} dF^{\alpha} = h_{i11}^{'}(1-\lambda^{'})\chi\int_{F^1} x_3 dF^1 \,, \tag{18}$$

stąd

$$D_i = h_{i11}^{'}(1-\lambda^{'})\chi\frac{2S}{F} \,,\ \text{gdzie}\ \ S = \int_{F^1} x_3 dF^1 \,. \tag{19}$$

W przypadku zastępczego pręta jednorodnego zachodzi

$$D_i^{c} = -h_{i11}^{c}(1-\lambda^{c})\varepsilon_{11} \,,\quad \varepsilon_{11} = \chi x_3 \,. \tag{20}$$

Stąd po uśrednieniu otrzymamy

$$FD_i^{c} = -h_{i11}^{c}(1-\lambda^{c})\chi\int_{F} x_3 dF \,, \tag{21}$$

czyli

$$D_i^{c} = -h_{i11}^{c}(1-\lambda^{c})\chi\frac{1}{F}2S^{c} \,. \tag{22}$$

Zakładając równość $D_i = D_i^{c}$ otrzymamy współzależność między rzeczywistymi a uśrednionymi własnościami materiału

$$h_{i11}^{'}(1-\lambda^{'})\chi\frac{2S}{F} = h_{i11}^{c}(1-\lambda^{c})\chi\frac{2S^{c}}{F} \rightarrow h_{i11}^{'}(1-\lambda^{'})S = h_{i11}^{c}(1-\lambda^{c})S^{c} \,. \tag{23}$$

W pręcie bez uszkodzeń $\lambda' = \lambda^c = 0$, stąd

$$h_{i11}' = h_{i11}^{c}\,\frac{S^c}{S} \tag{24}$$

lub

$$h_{i11}^{c} = h_{i11}'\,\frac{S}{S^c}\,. \tag{25}$$

Natomiast współzależność lokalnego parametru uszkodzenia λ' od globalnego λ^c wynosi

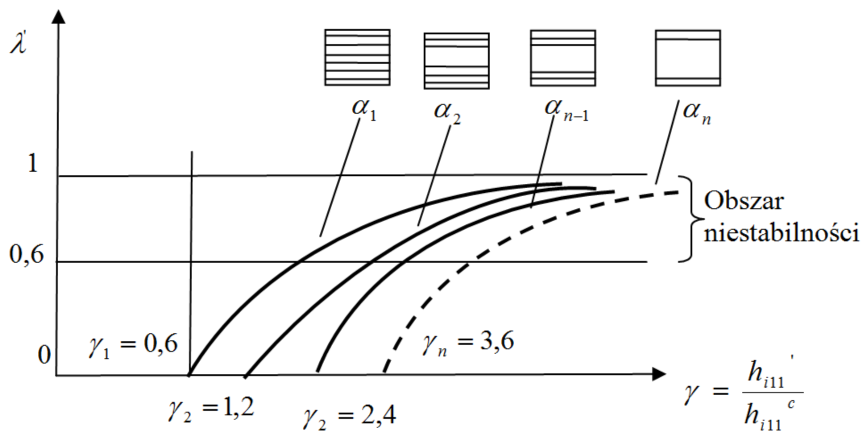
$$\lambda' = \frac{-h_{i11}^{c}(1-\lambda^c)S^c}{h_{i11}'S}+1\,. \tag{26}$$

Możemy sporządzić wykresy zależności lokalnego parametru uszkodzenia λ' od ilorazu funkcji materiałowych w piezoelektrykach

$$\lambda' = -\alpha_n\frac{1}{\gamma}+1\,, \tag{27}$$

gdzie

$$\alpha_n = \{(1-\lambda^c)\frac{S^c}{S}\}_n\,,\ \ \gamma=\frac{h_{i11}'}{h_{i11}^{c}}\,. \tag{28}$$



Rys. 3. Wykres zależności lokalnego parametru uszkodzenia λ' od ilorazu stałej piezoelektrycznej lokalnej do stałej piezoelektrycznej globalnej

Fig. 3. Graph of the local damage parameter λ' of the piezoelectric constant ratio of local to global piezoelectric constant

Rozważania tu podane pozwalają przenosić wyniki uzyskane dla jednorodnych zagadnień piezoelektryki na zagadnienia techniczne, gdzie uszkodzenia są zlokalizowane w określonych warstwach przekroju

Literatura

[1] Kubik J.: Mechanika konstrukcji warstwowych, Wydawnictwo TiT, Opole, 1993.
[2] Kubik J., Perkowski Z.: Narastanie uszkodzeń w materiałach porowatych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole, 2005.
[3] Nowacki W.: Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych, PWN, Warszawa, 1983.

BENDING OF BARS WITH PIEZOELECTRIC LAYER

Summary

In the paper – bending of bars with piezoelectric layer – is analyzed. It were calculated equivalent material function as a result of comparison of bending bar with piezoelectric sensors to homogeneous bar. It was received correlation between local value of damage parameter and global value of damage parameter.