ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 11/2011
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

SPECYFIKACJA PARAMETRÓW SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH MODELI GRUNTÓW METODĄ RÓWNOCZESNĄ

Paweł FEDCZUK
Politechnika Opolska Opole

1. Wprowadzenie

Zastosowanie w praktyce złożonych sprężysto-plastycznych modeli gruntów wymaga każdorazowo specyfikacji ich parametrów. Zwykle do ich identyfikacji wykorzystuje się metodę stopniową [2], analizującą rezultaty badań trójosiowych, w której dla zaprogramowanej sekwencji testów specyfikuje się kolejno pojedyncze stałe, dokonując liniowej regresji wyników metodą najmniejszych kwadratów. Alternatywnym podejściem jest metoda równoczesna [2, 1], w której dla rezultatów testu jednego rodzaju realizuje się złożoną nieliniową analizę regresji wyników metodą najmniejszych kwadratów, ustalając jednocześnie wszystkie stałe.

W niniejszym opracowaniu omawia się koncepcję metody równoczesnej estymacji parametrów sprężysto-plastycznych modeli gruntów. Szczegółową prezentację wersji funkcji celu poprzedza ogólne omówienie algorytmu zastosowanej kombinacji 2 bezgradientowych metod programowania matematycznego, łączącej sposób kolejnego przeszukiwania z nieliniową metodą symplexu Neldera-Meada [4]. Prezentację uzupełnia przykład identyfikacji parametrów modelu Novy-Wooda [5] dla wyników teoretycznie zrealizowanej ścieżki standardowego ścinania.

2. Koncepcja metody równoczesnej identyfikacji parametrów

Z matematycznego punktu widzenia równoczesna metoda parametrycznej specyfikacji modelu stanowi zadanie programowania matematycznego, w którym poszukuje się wektora parametrów **b** minimalizującego funkcję celu $Q(\mathbf{b})=\Sigma[y_i-\psi_i(x_i,\ \mathbf{b})]^2$ w postaci sumy N kwadratów różnic wyników badań y_i i obliczeń ψ_i dla zmiennych sterujących x_i. Do identyfikacji poszukiwanych parametrów wykorzystuje się wyniki uzyskane z realizacji założonych ścieżek naprężenia w badaniu trójosiowym. Jednoznacznym obrazem testu trójosiowego jest zestaw N wartości 4 niezmienników: efektywnego naprężeń ścinającego q' i średniego p', intensywności odkształcenia ε_s i odkształcenia objętościowego ε_v, ujętych w formę 4 sprzężonych charakterystyk (ścieżek naprężenia q'-p' i odkształcenia ε_s-ε_v, oraz charakterystyk ścinania q'-ε_s i ściśliwości p'-ε_v). W przypadku realizacji założonej trajektorii naprężenia – wielkości q' i p' stanowią odpowiedniki zmiennej sterującej x_i, natomiast pozostałe dwa niezmienniki ε_s i ε_v (lub ich kombinacje z wielkościami *q'* i *p'*) obrazują wyniki badań y_i (lub obliczeń ψ_i). Wobec braku jawnej postaci funkcji ψ_i (x_i, **b**) wartości ψ_i otrzymuje się z przybliżonego rozwiązania numerycznego, symulującego odpowiednią ścieżkę naprężenia w badaniu trójosiowym.

3. Warianty funkcji celu

Podstawowym problemem tak sformułowanego zadania minimalizacji jest właściwe określenie funkcji celu *Q* tzn. wybór zmiennej sterującej x_i i wartości mierzonej y_i, oraz obliczanej ψ_i (x_i, **b**). Rozważać można różne warianty, uwzględniając kombinacje pomiędzy czterema niezmiennikami stanu: naprężenia *p'*, *q'* i odkształcenia ε_s, ε_v.

Najogólniejsze są wersje kompleksowe: (a) odkształceniową – bazującą na charakterystykach ścinania i ściśliwości, (b) energetyczną – uwzględniającą stratę energii związaną ze zmianą postaci i objętości. Definiują one funkcję celu *Q* w pierwszym przypadku (a) dla sekwencji *N* wyników $x_i = q'_i$ i $y_i = \varepsilon_{si}$ i *N* rezultatów $x_i = p'_i$ i $y_i = \varepsilon_{vi}$, a w drugim (b) – dla zestawu *N* wyników $x_i = q'_i$ i $y_i = q'_i\,\varepsilon_{si}$ i *N* rezultatów $x_i = p'_i$ i $y_i = p'_i\,\varepsilon_{vi}$, stosownie do wzorów

$$
\begin{aligned}
Q(\mathbf{b}) &= \alpha_s \sum_{i=1}^{N} \beta_s [\varepsilon_{si} - \varepsilon_{si}(q'_i\,, p'_i\,, \mathbf{b})]^2 + \alpha_v \sum_{i=1}^{N} \beta_v [\varepsilon_{vi} - \varepsilon_{vi}(q'_i\,, p'_i\,, \mathbf{b})]^2 \\
Q'(\mathbf{b}) &= \alpha_s \sum_{i=1}^{N} \beta_s [q'_i\,\varepsilon_{si} - q'_i\,\varepsilon_{si}(q'_i\,, p'_i\,, \mathbf{b})]^2 + \alpha_v \sum_{i=1}^{N} \beta_v [p'_i\,\varepsilon_{vi} - p'_i\,\varepsilon_{vi}(q'_i\,, p'_i\,, \mathbf{b})]^2
\end{aligned} \tag{1}
$$

Mnożniki α_s, α_v={1, 0} pozwalają sprowadzić je do odpowiedniej składowej wersji cząstkowej. Wartości β_s, β_v (stałe lub zmienne dla serii *N* wyników) stanowią odpowiedniki współczynników wagi, pozwalających na korektę dostosowania „skali" rezultatów w przypadku dużych dysproporcji pomiędzy niezmiennikami *p'*, *q'* i ε_s, ε_v (rzędu 10 i więcej).

Do weryfikacji poprawności dokonanej estymacji parametrów wykorzystuje się warunek dokładności „nałożenia" graficznych charakterystyk funkcyjnych zależności dla wartości obliczonych i ilustrujących wyniki.

4. Algorytm metody

Problemy związane z ustaleniem ciągłości dziedziny składowych wektora parametrów **b** minimalizującego funkcję celu *Q*, preferują proste techniki programowania matematycznego. Stąd w tym przypadku do identyfikacji parametrów modelu metodą równoczesną stosuje się dwuetapowy algorytm obliczeniowy obejmujący: (I) ustalenie wektora początkowych parametrów **b** modelu gruntu metodą kolejnego przeszukiwania, (II) określenie ostatecznych wartości stałych nieliniową metodą symplexu Neldera i Meada [4]. Etap (I) sprowadza się do konstrukcji regularnej siatki punktów węzłowych *k*-wymiarowego prostopadłościanu parametrów startowych (poprzez podział każdej jego krawędzi na *j* jednakowych części) i stopniowe jego zmniejszania aż do osiągnięcia minimalnej wartości funkcji celu Q_{min}. Etap (II) realizuje cykl obliczeń metodą Neldera-Meada dla regularnego sympleksu zbudowanego na wektorze parametrów modelu **b** dla funkcji celu Q_{min}.

Do numerycznej symulacji badania trójosiowego wykorzystuje się procedurę, realizującą założone ścieżki naprężenia za pomocą techniki przyrostowo-iteracyjnej [1] (opartej na zmodyfikowanej metodzie Newtona-Raphsona), gdzie stan uplastycznienia analizuje się metodą Nayaka-Zienkiewicza [3]. Przedstawiony algorytm realizuje para programów komputerowych PARID i AL3OSM napisanych w języku FORTRAN, komunikujących się poprzez zbiory danych. Pierwszy program ustala parametry modelu, wykorzystując drugi do symulacji ścieżki naprężenia w badaniu trójosiowym.

5. Sprężysto-plastyczny model Novy-Wooda

Sprężysto-plastyczny model szkieletu gruntowego Novy-Wooda [5] jest związkiem typu nasadkowego. Powierzchnia plastyczności, zbudowana jest z części nasadkowej F_1 i stożkowej F_2, opisanych zależnościami

$$\begin{aligned} F_1 &= q' - [M + m \ln (p'/p'_u)]p' = 0 \quad \text{dla} \quad \eta = q'/p' \geq \eta_c \\ F_2 &= q'^2 + 0{,}25 M^2 \mu^{-1} (p'^2 - p_0'^2) = 0 \quad \text{dla} \quad \eta = q'/p' < \eta_c \end{aligned} \tag{3}$$

w których: M – oznacza nachylenie linii stanu krytycznego CSL, p'_u – efektywne naprężenie średnie określające punkt przecięcia linii CSL z powierzchnią F_1, m – parametr modelu, μ – parametr dylatacji, p'_0 – ciśnienie prekonsolidacji, η_c – nachylenie linii określającej „połączenie" powierzchni nasadkowej F_1 i stożkowej F_2 ($\eta_c = 0{,}5M$). Prawo wzmocnienia definiują dwa parametry wzmocnienia – podstawowy, którym jest ciśnienie prekonsolidacji p'_0, oraz efektywne naprężenie średnie p'_u (uzależnione od plastycznych części intensywności odkształcenia ε_q^p i odkształcenia objętościowego ε_v^p), opisane wzorami

$$p'_0 = p'_r \exp[(\varepsilon_v^{\,p} + D\,\varepsilon_v^{\,p})\,(\lambda^* - \kappa^*)^{-1}] \qquad p'_u = p'_0\,(1+\mu)^{-0{,}5} \exp(-0{,}5 M\, m^{-1}) \tag{4}$$

gdzie: p'_r – oznacza początkową wartość ciśnienia prekonsolidacji p'_0, D – „kombinowany parametr wzmocnienia", λ^* i κ^* – stałe modelu. Stan wewnątrz powierzchni plastyczności opisuje liniowe prawo sprężystości, operujące parą modułów – ścinania G_t i ściśliwości K_t. Model specyfikuje zestaw 8 parametrów $\mathbf{b}=\{\lambda^*, \kappa^*, M, \mu, m, D, G_t, K_t\}$.

6. Przykład specyfikacji parametrów

Przykładową identyfikację parametrów modelu Novy-Wooda przeprowadzono dla wyników symulowanego numerycznie testu trójosiowego, realizującego ścieżkę niestandardowego ścinania 50-cioma jednakowymi przyrostami naprężenia dla parametrów charakteryzujących ił ze Szwecji (zamieszczonych w wierszu (B) z Tabeli 1).

Do analizy przyjęto 2 kompleksowe wersje funkcje celu Q określone wzorami (1) (dla $\alpha_s=\alpha_v=\beta_s=\beta_v=1$). Estymację ograniczono do zestawu 6 plastycznych parametrów modelu $\boldsymbol{b}^p=\{\lambda^*, \kappa^*, M, \mu, m, D\}$, przyjmując, że wartości stałych sprężystych G_t=30kPa, K_t=46kPa ustalone zostały wcześniej. Startowe wartości współrzędnych punktów narożnych 6-wymiarowego prostopadłościanu parametrów zamieszczono w wierszu (A) Tabeli 1, dzieląc każdą z krawędzi na 2 części i przyjmując na niej 3 punkty węzłowe (oraz skalę zmniejszania krawędzi w kolejnych cyklach równą 1:0,65). Dla pokazania różnic – obliczenia ograniczono do (I) etapu, czyli do metody kolejnego przeszukiwania.

Zakończono je po 15 cyklach obliczeniowych, uzyskując dla odkształceniowej wersji wartość funkcji celu Q=2,3001×10^{-9}, a dla energetycznej – Q=3,2879×10^{-5}. Wyniki obliczeń zamieszczono w wierszach (a) i (b) Tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki identyfikacji parametrów modelu Novy-Wooda dla iłu ze Szwecji.

Punkt (wariant)	λ^*	κ^*	M	μ	m	D
(A)	0,0085 ÷ 0,01482	0,002925 ÷ 0,00507	0,91125 ÷ 1,5785	0,6 ÷ 1,04	0,6 ÷ 1,04	0,38025 ÷ 0,6591
(a) odkształceniowy	0,01169	0,00344	1,2449	0,8915	0,4941	0,4979
(b) energetyczny	0,01169	0,00361	1,2563	0,8998	0,4941	0,4474
(B)	0,0114	0,0039	1,215	0,8	0,8	0,507

Zdecydowanie szybszą zbieżnością charakteryzuje się opcja odkształceniowa (a). Nieznacznie bliższe estymowanym są rezultaty dla tej wersji funkcji celu, jednak w obydwóch przypadkach słabo oszacowana została stała m. W pozostałych przypadkach różnice w stosunku do wzorcowych nie przekraczają 12,5%.

Literatura

[1] Fedczuk P.: Numeryczna symulacja badania trójosiowego, XLV Konferencja Naukowa KILiW PAN I KN PZITB, T. 5 – Organizacja i zarządzanie w budownictwie. Geotechnika, Kraków-Krynica 1999, s. 107-114.

[2] Gryczmański M.: Reologiczny model o wzmocnieniu anizotropowym dla szkieletu gruntowego, Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, Budownictwo, Zeszyt 20, Nr 91/1983, Opole 1983.

[3] Nayak G. C., Zienkiewicz O. C.: Elasto-plastic stress analysis. A generalized for various constitutive relations including strain softening. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 5, 1972, p. 113-135.

[4] Nelder J.A., Mead R.: A Simplex Method for Function Minimization, Computer Journal, **7** (4), 1965, p. 308-313.

[5] Nova R., Wood D. M.: A constitutive model for sand in triaxial compression, International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics, 3 (3), 1979, p. 255-278.

THE SPECIFICATION OF PARAMETERS OF ELASTO-PLASTIC SOIL MODELS WITH USING SIMULTANEOUS METHOD

Summary

The paper presents the concept of parameter specification of elasto-plastic soil models with using simultaneous method. This method uses nonlinear regression analysis of results of triaxial test (for chosen stress path) to obtainment all constants. Discuss of objective functions variants precedes the presentation of algorithm using combination of successive search method with Nelder-Mead's simplex technique.