ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 11/2011
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ZAGADNIENIE POCZĄTKOWO-BRZEGOWE LINIOWEJ HIGROTERMOPIEZOSPRĘŻYSTOŚCI

Piotr GORECKI, Jerzy WYRWAŁ
Politechnika Opolska, Opole

1. Wprowadzenie

Z rezultatów badań eksperymentalnych wynika [9], że wilgoć i temperatura w znaczący sposób zmieniają właściwości kompozytów polimerowych z włóknami piezoelektrycznymi (wykorzystywanych np. do diagnostyki bądź monitoringu konstrukcji). Wpływ zmian wilgotności otoczenia na właściwości kompozytów piezoelektrycznych jest szczególnie widoczny w przypadku takich kompozytów, jak AFC (active fibre composite) i PFC (piezofibre composite), a tym samym płyt i powłok wykonanych z tych materiałów [10]. Wiadomo, że naprężenia wilgotnościowe spowodowane zmianami warunków otoczenia mogą wywołać dynamiczną niestabilność kompozytowych struktur powłokowych [7].

Z rezultatów badań opisanych w [13] wynika, że adaptacyjne kompozyty drewniane (adaptive wood composities), zwane też kompozytami aktywnymi bądź inteligentnymi, złożone z warstw drewna i piezoelektryka, są przykładem takich elementów strukturalnych, gdzie sprzężone pola: mechaniczne, elektryczne, cieplne i wilgotnościowe mogą mieć silny wpływ na ich zachowanie.

W literaturze można spotkać niewiele prac poświęconych mechanice kompozytów (laminatów) poddanych jednoczesnemu działaniu obciążeń mechanicznych, pola elektrycznego, a także zmiennej temperaturze i wilgotności otoczenia. Pierwszą z takich nielicznych prac jest publikacja [12], w której na bazie liniowych równań termosprężystości [8] oraz higrotermosprężystości [11] zaproponowano podstawowe równania liniowej higrotermopiezoelektryczności w postaci lokalnej (różniczkowej). Analizę płyt i powłok wykonanych z kompozytów piezoelektrycznych i poddanych działaniu wspomnianych wyżej pól, przy wykorzystaniu metody ważonych residuów, można znaleźć w [9,10]. Autorzy pracy [14] sformułowali zasadę wariacyjną w przypadku dynamicznego zagadnienia anizotropowej piezohigrotermolepkosprężystości w ujęciu MES. Wyprowadzeniu zasady wariacyjnej w przypadku działania quasi-statycznego pola elektrycznego na materiał higrotermopizoelektryczny poświęcona jest praca [1]. Drgania cienkiej powłoki higrotermopiezoelektrycznej analizowane były w pracach [3, 4]. Analizie zachowania się laminowanych higrotermopiezoelektrycznych płyt poświęcona jest praca [14]. Przegląd literatury z zakresu zasad wariacyjnych higrotermopiezoelektryczności można znaleźć w [2]. Warto też zwrócić uwagę na rezultaty zawarte w pracy [6].

2. Sformułowanie zagadnienia początkowo-brzegowego liniowej higrotermopiezosprężystości

2.1. Równania pola

Rozważmy anizotropowy materiał piezoelektryczny, w którym zachodzą procesy wymiany ciepła i wilgoci w obecności obciążeń mechanicznych i pola elektrycznego. Rozważane zagadnienie opisują następujące, ogólnie znane równania:

– ruchu (bilansu pędu) wraz ze związkami geometrycznymi

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \,, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = u_{(i,j)} \,, \tag{2}$$

– Maxwella

$$D_{k,k} - \rho_e = 0 \,, \tag{3}$$

$$E_k = \Phi_{,k} \,, \tag{4}$$

– bilansu entropii

$$\rho r + q_{k,k} = -T_o \dot{s} \,, \tag{5}$$

– dyfuzji (bilansu masy)

$$\rho R + j_{k,k} = -\rho \dot{c} \,. \tag{6}$$

W powyższych równaniach przecinek w dolnym indeksie oznacza pochodną cząstkową względem danej zmiennej (np. $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$), zaś kropka nad daną wielkością oznacza lokalną pochodną po czasie.

2.2. Równania konstytutywne

W pierwszej kolejności przyjmiemy, że wektor strumienia ciepła q_i zależny jest od gradientu temperatury materiału (zgodnie z prawem Fouriera):

$$q_i = -\kappa_{ij} \Theta_{,j} \,, \tag{7}$$

zaś wektor strumienia masy j_i zależy od gradientu potencjału chemicznego:

$$j_i = -D_{ij} M_{,j} \,. \tag{8}$$

Do równań (1, 3, 5, 8) musimy jeszcze dołączyć równania konstytutywne określające: tensor naprężenia σ_{ij}, wektor przesunięcia pola elektrycznego D_k, entropię s, potencjał chemiczny M. Równania te uzyskamy różniczkując potencjał higrotermopiezosprężysty $H(\varepsilon_{ij}, E_k, \theta, c)$, będący uogólnieniem potencjału termopiezoelektrycznego sformułowanego w [5]. Potencjał ten, zależny od tensora odkształcenia ε_{ij}, wektora natężenia pola elektrycznego E_k, przyrostu temperatury θ ($\theta = T - T_0$, $\theta << T_0$) i koncentracji c ($c = C - C_0$, $c << C_0$), przyjmiemy w przypadku rozważanego zagadnienia w następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
H(\varepsilon_{ij}, E_i, \Theta, c) = {} & \frac{1}{2}\left(a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - c_{ij}E_iE_j - \alpha\Theta^2 - mc^2\right) \\
& + e_{kij}E_k\varepsilon_{ij} - h_i\theta E_i - \beta_{ij}\varepsilon_{ij}\Theta - \mu_{ij}\varepsilon_{ij}c - \vartheta_i E_i c + d\theta c,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

gdzie $\alpha = \rho c_\varepsilon / T_0$.

W powyższej zależności wielkości $a_{ijkl}, e_{kij}, c_{ij}, \beta_{ij}, \mu_{ij}, h_i, \vartheta_i, m, d, \alpha$ oznaczają współczynniki materiałowe, które należy wyznaczyć eksperymentalnie. Charakteryzują się one następującymi symetriami:

$$
a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk} = a_{klij}, \; c_{kj} = c_{jk}, \; e_{kij} = e_{kji}, \; \beta_{ij} = \beta_{ji}, \; \mu_{ij} = \mu_{ji}. \tag{10}
$$

W przypadku materiału piezoelektrycznego, w którym pola: mechaniczne, elektryczne, cieplne i wilgotnościowe są w pełni sprzężone, równania konstytutywne określające: tensor naprężenia, wektor przesunięcia pola elektrycznego, entropię i potencjał chemiczny dane są zależnościami:

$$
\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k - \beta_{ij}\Theta - \mu_{ij}c, \tag{11}
$$

$$
D_k = -\frac{\partial H}{\partial E_i} = e_{kij}\varepsilon_{ij} + c_{kj}E_j + h_k\Theta - \vartheta_k c, \tag{12}
$$

$$
s = -\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} = \beta_{ij}\varepsilon_{ij} + h_kE_k + \alpha\Theta + dc, \tag{13}
$$

$$
M = -\frac{\partial H}{\partial c} = \mu_{ij}\varepsilon_{ij} + \vartheta_i E_i + d\Theta + mc. \tag{14}
$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ 32 równań różniczkowych cząstkowych z 32 niewiadomymi, a mianowicie: 3 równania równowagi (1), 6 związków geometrycznych (2), 4 równania Maxwella (3) i (4), po jednym równaniu bilansu entropii (5) i masy (6), po trzy równania określające strumień ciepła (7) i masy (8), oraz 11 równań konstytutywnych (11-14). Z równań tych możemy wyznaczyć po 6 składowych tensorów naprężenia i odkształcenia, po trzy składowe wektorów: przemieszczenia, przesunięcia i natężenia pola elektrycznego, strumieni ciepła i masy, entropię, temperaturę, potencjał chemiczny i koncentrację.

2.3. Warunki początkowo-brzegowe

Aby rozwiązać zagadnienie higrotermopiezosprężystości opisane wymienionymi wyżej równaniami należy przedtem sformułować warunki brzegowe. Warunki te mają następującą postać:

$$u_i = \hat{u}_i \text{ na } \partial B_u \,, \tag{15}$$

$$\sigma_{ij} n_j = \hat{p}_i \text{ na } \partial B_\sigma, \quad \partial B_u \cup \partial B_\sigma = \partial B \,, \tag{16}$$

$$\Phi = \hat{\Phi} \text{ na } \partial B_\Phi \,, \tag{17}$$

$$D_k n_k = \hat{D} \text{ na } \partial B_D, \quad \partial B_\Phi \cup \partial B_D = \partial B \,, \tag{18}$$

$$\theta = \hat{\theta} \text{ na } \partial B_\Theta \,, \tag{19}$$

$$q_i n_i = \hat{q} \text{ na } \partial B_q, \quad \partial B_\theta \cup \partial B_q = \partial B \,, \tag{20}$$

$$c = \hat{c} \text{ na } \partial B_c \,, \tag{21}$$

$$j_i n_i = \hat{j} \text{ na } \partial B_j \quad \partial B_c \cup \partial B_j = \partial B \,, \tag{22}$$

gdzie: $\partial B_\alpha \; (\alpha = u, p, \Phi, D, \Theta, q, c, M)$ – powierzchnia, do której jest przyłożona odpowiednia wielkość wynikająca z warunku brzegowego, $\hat{u}_i, \hat{p}_i, \hat{\Phi}, \hat{D}, \hat{\Theta}, \hat{q}, \hat{c}, \hat{j}$ to kolejno zadane na brzegu ciała: przemieszczenie i siła powierzchniowa, potencjał i przesunięcie elektryczne, temperatura i strumień ciepła, koncentracja i strumień masy.

Komplet równań zagadnienia uzupełniają warunki początkowe

$$u_i(x_k, t=0) = u_i^\circ, \quad \dot{v}_i(x_k, t=0) = v_i^\circ \quad \text{w } B \,, \tag{23}$$

$$s\,(x_k, t=0) = s^\circ \quad \text{w } B \,, \tag{25}$$

$$c\,(x_k, t=0) = c^\circ \quad \text{w } B \,, \tag{26}$$

gdzie: $u_i^\circ, v_i^\circ, s^\circ, c^\circ$ – wartości początkowe przemieszczenia, prędkości, entropii i koncentracji.

Przedstawione powyżej równania pola (1-6), równania konstytutywne (7), (8), (11-14), warunki brzegowe (15-22) oraz warunki początkowe (23-26) tworzą zadanie początkowo-brzegowe higrotermopiezosprężystości. Jest to skomplikowany układ sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych mechaniki, przewodnictwa cieplnego, dyfuzji i elektrodynamiki ośrodków ciągłych.

3. Podsumowanie

W prezentowanym artykule przedstawiono podstawowe równania higrotermopiezosprężystości wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi. Mogą być one wykorzystane do poszukiwania analitycznych i numerycznych rozwiązań problemów związanych z wykorzystaniem materiałów piezoelektrycznych poddanych działaniu temperatury i wilgotności.

Oznaczenia symboli

c przyrost koncentracji, concentration increment [-],
c_ε ciepło właściwe, specific heat [J kg^{-1} K^{-1}],
C koncentracja wilgoci, moisture concentration [-],
C_0 koncentracja początkowa, reference concentration [-],
D_k wektor przesunięcia pola elektrycznego, electric displacement vector [C m^{-2}],
E_k wektor natężenia pola elektrycznego, electric field vector [V m^{-1}],
f_i wektor siły objętościowej, mechanical body force [N m^{-3}],
j_k wektor natężenia strumienia masy, mass flux vector [kg m^{2} s^{-1}],
n_k wektor normalny do brzegu, unit outward normal vector,
q_k wektor natężenia strumienia ciepła, heat flux vector [W m^{-2}],
ρr źródło ciepła, heat source [W m^{-3}],
ρR źródło masy, mass source [kg m^{-3} s^{-1}],
t zmienna przestrzenna, time [s],
T temperatura absolutna, absolute temperature [K],
T_0 temperatura początkowa, reference temperature [K],
u_i wektor przemieszczenia, elastic displacement vector [m],
x_k współrzędna przestrzenna, spatial position [m],
ε_{ij} tensor odkształcenia, symmetric strain tensor [-],
Φ potencjał elektryczny, electric potential [V],
η gęstość entropii, entropy density [J K^{-1} m^{-3}],
κ_{ij} współczynnik przewodnictwa cieplnego, thermal conductivity [W m^{-2} K^{-1}],
Θ przyrost temperatury, temperature increment [K],
ρ gęstość masy, mass density [kg m^{-3}],
ρ_e gęstość ładunku, charge density [C m^{-3}],
σ_{ij} tensor naprężenia, symmetric stress tensor [Pa].

Literatura

[1] Altay, G., and Dökmeci, M. C., Certain hygrothermopiezoelectric multifield variational principles for smart laminae in elastic range, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 15, 2008, 21–32.

[2] Altay, G., and Dökmeci, M. C., Variational principles for piezoelectric, thermopiezoelectric, and hygrothermopiezoelectric continua revisited, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 14, 2007, 549–562.
[3] Dökmeci, M. C., Altay, G., High-frequency vibrations of hygrothermopiezoelectric thin shells, Proceedings of Mindlin Centennial Symposium, Colorado (June 2006).
[4] Dökmeci, M. C., Altay, G., Curved laminae equations for hygrothermopiezoelectric materials at elastic range, Proceedings of ESM Mechanics Conference, Virginia Tech (May 2008), 23.
[5] Gülay, A., Dökmeci, M. C., The consistent Midlin's thermopiezoelectric equations and the principle of virtual work, Mechanics Research Communications, 32, 2005, 115-119.
[6] Jędrzejczyk-Kubik, J, Variational theorem for theory of thermopiezoelectricity with damage, Roczniki Inżynierii Budowlanej, 9, 20095, 89-92.
[7] Kundu, C. K., Han, J-H., Nonlinear piezo-hygro-thermo-elastic behavior of piezolaminated composite shells using finite element method, Proceedings of KSAS-JSASS Joint International Symposium on Aerospace Engineering, Jeju, Korea (November 2008), 308-311.
[8] Nowacki,W., Dynamic problems of thermoelasticity, Noordhoff, Leyden, The Netherlands 1975.
[9] Raja, S., Dwarakanathan, D., Sinha P. K., and Prathap, G., Bending behavior of piezo–hygrothermo–elastic smart laminated composite flat and curved plates with active control," J. Reinforced Plast. Compos., 23, 2004, 265–290.
[10] Raja, S., Sinha, P. K., Prathap, G., and Dwarakanathan, D., Influence of active stiffening on dynamic behavior of piezo–hygro–thermo–elastic composite plates and shells, Journal of Sound and Vibration, 278, 2004, 257–283.
[11] Sih, G. C., Michopoulos, J. G., and Chou, S. C., Hygrothermoelasticity, Martinus Nijhoff, Dordrecht, The Netherlands 1986.
[12] Smittakorn, W., and Heyliger, P. R., A discrete-layer model of laminated hygrothermopiezoelectric plates, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 7, 2000, 79–104.
[13] Smittakorn, W., A theoretical and experimental study of adaptive wood composities (dissertation), Colorado State University, Colorado 2001.
[14] Yi, S., Ling, S. F., Ying, M., Hilton, H. H., and Vinson, J. R., Finite element formulation for anisotropic coupled piezoelectro–hygro–thermo–viscoelasto–dynamic problems, Int. J. Num. Meth. Engng., 45, 1999, 1531–1546.

BOUNDARY INITIAL VALUE PROBLEM OF LINEAR HYGROTHERMOPIEZOELASTICITY

Summary

The paper contains balance equations, constitutive equations and initial-boundary value conditions of linear higrothermopiezoelectricity. The results obtained in this work can become the theoretical basis to formulate the numerical solutions of different scientific and engineering problems connected with piezoelectric materials.