ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 12/2012
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

# TWIERDZENIE O WZAJEMNOŚCI DLA DYSTORSJI GRADIENTOWYCH

Jan KUBIK
Politechnika Opolska

## 1. Wprowadzenie

W pracy analizuje się symetrie równań fizycznych gradientowej lepkosprężystości z udziałem dystorsji niemechanicznych pochodzących od pól temperatur $\Theta$ , dyfuzji masy $c$, przepływów jonowych $E_i$ czy też uszkodzeń materiału $\varphi_{ij}$. W efekcie końcowym uzyskuje się twierdzenie o wzajemności, które pozwala na poszukiwanie rozwiązań najprostszych zadań gradientowej termo mechaniki por.[2]. Twierdzenie to stanowi uogólnienie klasycznych badań symetrii operatorów zadań brzegowych liniowej lepkosprężystości z udziałem pól niemechanicznej natury opisanych m.in.w [1].

## 2. Równania problemu

Analizowane w pracy zagadnienie opisane jest uogólnionym układem równań równowagi i równań geometrycznych ujmujących tensor odkształceń jak i jego gradient

$$(\sigma_{ij} + \tau_{ijk,k})_{,j} + \rho F_i = \rho \dot{v}_i , \tag{1}$$

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \qquad i \quad \eta_{ijk} = \varepsilon_{ij,k} \tag{2}$$

oraz równań fizycznych uwzględniających dystorsje gradientowe i reologiczne własności ośrodka:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= E_{ijkl} * d(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^0_{kl}) + e_{ijkln} * d(\eta_{kln} - \eta^0_{kln}), \\ \tau_{ijk} &= G_{ijklnm} * d(\eta_{lnm} - \eta^0_{lnk}) + R_{ijkln} * d(\varepsilon_{ln} - \varepsilon^0_{ln}), \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie tensory dystorsji $\varepsilon^0_{kl}$ posiadają jedną z postaci:

$$\varepsilon^0_{kl} = \alpha_{kln} E_n , \quad \varepsilon^0_{kl} = \alpha_{kl}\Theta , \quad \varepsilon^0_{kl} = \alpha^0_{klmn}\varphi_{mn} ,$$

$$\eta^0_{lnm} = \beta_{lnmr} E_r , \qquad \eta^0_{lnm} = \alpha_{lnm}\, \theta_{,m} . \tag{4}$$

Do równań tych należy dołączyć warunki brzegowe na siły powierzchniowe i przemieszczenia:

$$\sigma_{ij}\, n_j \Big|_{A_\sigma} = P_i\,, \qquad u_i \Big|_{A_n} = \overset{o}{u}_i\,, \quad \tau_{ijk,k}\, n_j \Big|_{A_\tau} = \tilde{P}_i\,. \tag{5}$$

W równaniach tych symbolami $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}, \overset{\circ}{\eta}_{ijk}, \mathrm{u}_i, \rho \mathrm{F}_\mathrm{i}, P_i, E_{ijkl}, e_{ijkln}, \mathrm{G}_{\mathrm{ijklnm}}, \alpha_{kln}$, $E_n, \Theta, \varphi_{\mathrm{mn}}, *$ oznaczono kolejno tensory naprężeń, odkształceń, dystorsji, przemieszczenia, siły masowe i powierzchniowe, tensor funkcji relaksacji, tensor określający pole odkształceń wywołane dystorsjami pola niemechaniczne takie jak $E_n, \Theta, \varphi_{mn}, *$, czyli kolejno pole elektryczne, temperatur i tensora uszkodzeń materiału, natomiast symbol $f_1 * df_2 = f_2 * df_1$ oznacza iloczyn splotowy Stieltjesa funkcji $f_1$ i $f_2$, jako funkcji czasu t.

## 3. Symetria pól

Punktem wyjściowym rozważań prowadzących do twierdzenia o wzajemności są równania fizyczne (3) na tensor naprężeń oraz naprężeń gradientowych z uwzględnieniem dystorsji $\varepsilon_{ij}^0$ $i$ $\eta_{ijk}^0$.

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} * d(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0) + e_{ijkln} * d(\eta_{kln} - \eta_{kln}^0) \tag{6}$$

$$\tau_{ijk} = e_{ijkln} * d(\varepsilon_{ln} - \varepsilon_{ln}^0) + G_{ijklnm} * d(\eta_{lnm} - \eta_{lnm}^0)$$

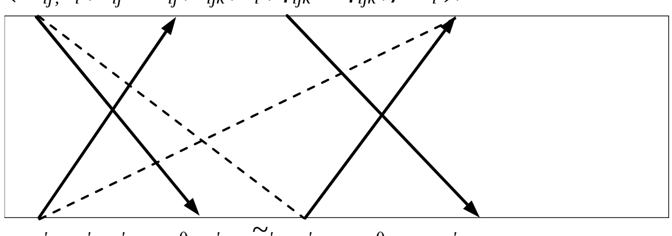
W klasycznym ujęciu problemu analizuje się symetrie pary pól (..), (..')

$$(\sigma_{ij}, P_i, \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0, \tau_{ijk}, \tilde{P}_i, \eta_{ijk} - \eta_{ijk}^0, \rho F_i),$$

$$(\sigma_{ij}', P_i', \varepsilon_{ij}' - \varepsilon_{ij}^{0'}, \tau_{ijk}', \tilde{P}_i', \eta_{ijk}' - \eta_{ijk}^{0'}, \rho F_i'),$$

zgodnie z diagramem zależności przedstawionym na rys.1.

$$(\sigma_{ij}, P_i, \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0, \tau_{ijk}, \tilde{P}_i, \eta_{ijk} - \eta_{ijk}^0, \rho F_i),$$



$$(\sigma_{ij}', P_i', \varepsilon_{ij}' - \varepsilon_{ij}^0, \tau_{ijk}', \tilde{P}_i', \eta_{ijk}' - \eta_{ijk}^0, \rho F_i')$$

Rys. 1. Pary porównywanych pól mechanicznych i dystorsji
Fig. 1. Pairs of distortions and mechanical fields

Badanie symetrii równań fizycznych prowadzi do zależności:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} * d\varepsilon_{ij}^{'} &= E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} * d\varepsilon_{ij}^{'} + e_{ijkln} * d\eta_{kln} * d\varepsilon_{ij}^{'} - \\ &- E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl}^{0} * d\varepsilon_{ij}^{'} - e_{ijkln} * d\eta_{kln}^{0} * d\varepsilon_{ij}^{'} \ , \end{aligned} \tag{7}$$

z której wynika wstępna tożsamość dla klasycznej (niegradientowej) części zadania:

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} * d\varepsilon_{ij}^{'} - \sigma_{ij}^{'} * d\varepsilon_{ij} - e_{ijkln} * ( d\eta_{kln} * d\varepsilon_{ij}^{'} - d\eta_{kln}^{'} * d\varepsilon_{ij}^{'} ) = \\ &= E_{ijkl} * ( d\varepsilon_{kl}^{0} * d\varepsilon_{ij}^{'} - d\varepsilon_{kl}^{0'} * d\varepsilon_{ij} ) + e_{ijkln} * ( d\eta_{kln}^{0} * d\varepsilon_{ij}^{'} - d\eta_{kln}^{0'} * d\varepsilon_{ij} ). \end{aligned} \tag{8}$$

Podobnie zachodzi dla tensora naprężeń wyższego rzędu (gradientowych):

$$\begin{aligned} \tau_{ijk} * d\eta_{ijk}^{'} &= e_{ijkln} * d\varepsilon_{ln} * d\eta_{ijk}^{'} + G_{ijklnm} * d\eta_{lnm} * d\eta_{ijk}^{'} - \\ &- e_{ijkln} * d\varepsilon_{ln}^{0} * d\eta_{ijk}^{'} - G_{ijklnm} * d\eta_{lnm}^{0} * d\eta_{ijk}^{'} . \end{aligned} \tag{9}$$

Otrzymujemy stąd analogiczną do (8) tożsamość dla gradientowej części zadania:

$$\begin{aligned} &\tau_{ijk} * d\eta_{ijk}^{'} - \tau_{ijk}^{'} * d\eta_{ijk} - e_{ijkln} * ( d\varepsilon_{ln} * d\eta_{ijk}^{'} - d\varepsilon_{ln}^{'} * d\eta_{ijk} ) = \\ &= e_{ijkln} * ( d\varepsilon_{ln}^{0} * d\eta_{ijk}^{'} - d\varepsilon_{ln}^{0'} * d\eta_{ijk} ) + G_{ijklnm} * ( d\eta_{lnm}^{0} * d\eta_{ijk}^{'} - d\eta_{lnm}^{0'} * d\eta_{ijk} ). \end{aligned} \tag{10}$$

## 4. Twierdzenie o wzajemności

Z otrzymanej pary tożsamości, czyli równań (8) i (10) wyniknie końcowa postać poszukiwanego twierdzenia. Istotnie, w wyniku porównania tożsamości cząstkowych (8) i (10) otrzymamy lokalna formę twierdzenia o wzajemności, czyli tożsamość:

$$\begin{aligned} &( \sigma_{ij} * d\varepsilon_{ij}^{'} - \sigma_{ij}^{'} * d\varepsilon_{ij} ) - ( \tau_{ijk} * d\eta_{ijk}^{'} - \tau_{ijk}^{'} * d\eta_{ijk} ) = \\ &= E_{ijkl} * ( d\varepsilon_{kl}^{0} * d\varepsilon_{ij}^{'} - d\varepsilon_{kl}^{0'} * d\varepsilon_{ij} ) + e_{ijkln} * ( d\eta_{kln}^{0} * d\varepsilon_{ij}^{'} - d\eta_{kln}^{0'} * d\varepsilon_{ij} ) + \\ &+ e_{ijkln} * ( d\varepsilon_{ln}^{0} * d\eta_{ijk}^{'} - d\varepsilon_{ln}^{0'} * d\eta_{ijk} ) + G_{ijklnm} * ( d\eta_{lnm}^{0} * d\eta_{ijk}^{'} - d\eta_{lnm}^{0'} * d\eta_{ijk} ) = V. \end{aligned} \tag{11}$$

Całkując tożsamość (11) po całym obszarze ciała z wykorzystaniem twierdzenia Gaussa, otrzymamy poszukiwaną postać twierdzenia o wzajemności w przypadku gradientowych dystorsji w ciele lepko sprężystym.

Ostatecznie poszukiwane twierdzenie o wzajemności dla dystorsji postaci $\varepsilon_{kl}^{0} = \alpha_{kl}\,\theta,\ \ \eta_{kln}^{0} = \alpha_{kl}\theta_{,n}$ przyjmie formę:

$$\begin{aligned} &\int_A [( P_i + \tilde{P}_i ) * dv_i^{'} - ( P_i^{'} + \tilde{P}_i^{'} ) * dv_i \,] dA + \int_V [\, \rho( F_i - \dot{v}_i ) * dv_i^{'} - \rho( F_i^{'} - \dot{v}_i^{'} ) * dv_i \,] dV + \\ &+ \int_V ( \tau_{ijk} * dv_{i,j}^{'} - \tau_{ijk}^{'} * dv_{i,j} ) n_k \, dA = \int_V [\, \gamma_{ij} * \left( d\,\Theta * d\,\varepsilon_{ij}^{'} - d\,\Theta^{'} * d\,\varepsilon_{ij} \right) + \\ &\gamma_{ijkm} * \left( d\,\Theta_{,m} * d\,\varepsilon_{ij,k}^{'} - d\,\Theta_{,m}^{'} * d\,\varepsilon_{ij,k}^{'} \right) ] \, dV + \int_A \gamma_{ijk} * \left( d\,\Theta * d\,\varepsilon_{ij}^{'} - d\,\Theta^{'} * d\varepsilon_{ij} \right) n_k \, dA \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie: $\gamma_{ij} = E_{ijkl}\,\alpha_{kl}$, $\gamma_{ijk} = e_{ijk\,ln}\,\alpha_{ln}$, $\gamma_{ijkm} = G_{ijk\,ln\,m}\,\alpha_{ln}$.

W tożsamości (12) lewa strona zawiera klasyczne elementy tego twierdzenia za wyjątkiem całek z iloczynów naprężeń gradientowych i tensora odkształceń. Natomiast po stronie prawej występują składniki związane z tensorami odkształceń dystorsyjnych. W przypadkach szczególnych, braku dystorsji otrzymamy klasyczne twierdzenie o wzajemności w gradientowej lepko sprężystości. Oczywiście dalszym przypadkiem szczególnym są równania twierdzenia o wzajemności w liniowej lepko sprężystości. Sytuacja ta jest na tyle korzystna, ponieważ pozwala na porównywanie analogicznych rozwiązań klasycznej lepko sprężystości z rozwiązaniami uogólnionymi w ramach teorii gradientowej.

### Literatura

[1] Kubik J., The reciprocity thorem in coupled problems of viscoelastic thermodiffusion, Acta Mechanica 50, ¾,1984.

[2] Kubik J., Variational theorems of the gradient viscoelesticity, International Conference 80 Years of FCE STU, Bratislava 2008.

[3] Kubik J., Reciprocal theorem of the gradient viscoelasticity with damage, VIII International Conference New Trends in Static and Dynamics of Buildings, Bratislava 2010.

## THE RECIPROCITY THEOREM FOR GRADIENT DISTORTION

### Summary

In the paper the reciprocity theorem for gradient viscoelasticity with non-mechanical distortion was proposed. The theorem arises from symmetry analysis of physical equations and can be treated as a generalization of adequate theorems of classical thermo-mechanics.