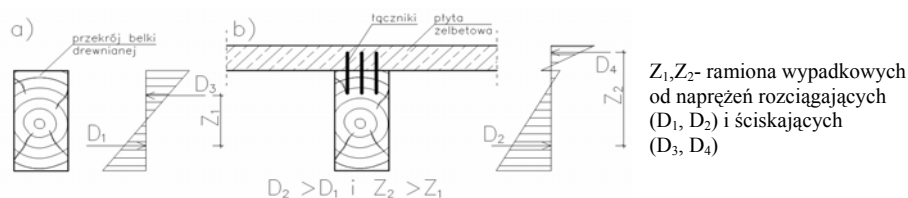


ANALIZA WPLYWÓW REOLOGICZNYCH W ZESPOLONYM STROPIE DREWNIANO-ŻELBETOWYM

Mariusz CZABAK, Zbigniew PERKOWSKI
 Politechnika Opolska, Opole

1. Wprowadzenie

Ideą projektowania i realizowania zespolonych stropów drewniano-żelbetowych jest przede wszystkim znaczna poprawa właściwości mechanicznych tego typu konstrukcji w stosunku do klasycznego stropu drewnianego. Zespolenie realizowane jest m.in. za pomocą różnego typu łączników stalowych (np. [2,8]). Poglądowo na rys. 1 pokazano rozkłady naprężeń normalnych w poprzecznym przekroju zginanej belki drewnianej i takiej samej po zespoleniu jej z płytą żelbetową. W belce zespolonej element drewniany pracuje prawie w całości w strefie rozciąganej, co dzieje się bez znacznego zwiększania naprężeń krawędziowych u jego dołu. Jest to niezwykle korzystne z uwagi na fakt, że drewno wzdłuż włókien lepiej przenosi naprężenia rozciągające w porównaniu do ściskających.



Rys. 1. Typowe rozkłady naprężeń normalnych w przekroju zginanej belki drewnianej (a) i po jej zespoleniu z płytą żelbetową (b).

Fig. 1. Typical distributions of normal stresses in the cross-section of bent wooden beam (a) and when it is combined with ferroconcrete plate (b).

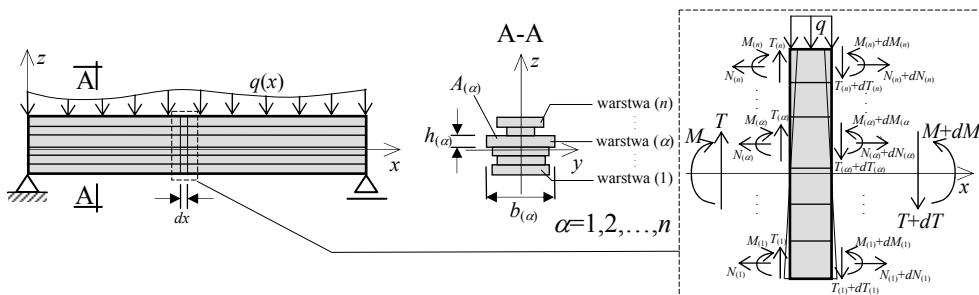
Mamy tu do czynienia również ze wzrostem ramienia sił wewnętrznych, co prowadzi do wzrostu nośności i sztywności stropu bez znaczącego zwiększenia jego ciężaru własnego (jego ciężar to ok. 1.5kN/m^2 , a np. stropu gęstożebrowego ok. 2.5kN/m^2). Zastosowanie takiego rozwiązania eliminuje efekt klawiszowania, jaki występuje na stropach drewnianych. Jest to rozwiązanie szczególnie cenne w przypadku rewitalizacji obiektów zabytkowych, gdyż pozwala na istotne wzmocnienie ich konstrukcji przy stosunkowo małej ingerencji w zastany układ nośny. Inną zaletą stosowania tego typu stropów jest fakt, że płyta betonowa tworzy poziomą tarczę usztywniającą cały budynek oraz pełni dodatkowo funkcję zabezpieczenia przeciwpożarowego belek z góry.

Należy w tym momencie wspomnieć, że choć w literaturze można spotkać się pracami, w których przedstawiony jest bardzo bogaty materiał eksperymentalny na temat zachowania się konstrukcji żelbetowo-drewnianych pod obciążeniem długotrwałym (w tym

i zmiennym) (np. [9]), to uwzględnienie wpływu różnego tempa pełzania drewna i betonu na wyężenie stropowych układów zespolonych w codziennej praktyce projektowej, bez zastosowań drogich i specjalistycznych programów, pozostaje dalej kwestią otwartą. Stąd w niniejszym artykule zdecydowano się poruszyć ten temat i zaproponować odpowiednie wzory, uwzględniające wspomniany aspekt, które będą możliwe do „szybkiego” i efektywnego oprogramowania we własnym zakresie. W prezentowanym dalej podejściu zakłada się, w celu uproszczenia prowadzonych analiz, że wydzielone myślowo ze stropu drewniano-żelbetowego żebró można traktować jako warstwowy element belkowy o właściwościach liniowo lepkosprężystych. Zakłada się ponadto, że styk elementów żelbetowego i drewnianego jest realizowany za pomocą łączników stalowych (typu gwoździe, wkręty (rys. 1)). W związku z tym, jeśli ilość tych łączników dobrana zostanie na podstawie standardowego warunku ich nośności na ścinanie (np. wg [8]), to na podstawie analiz prowadzonych w [1] można stwierdzić, że jest wówczas możliwe pominięcie wpływu wzajemnego poślizgu belki drewnianej i płyty na dokładność obliczeń rozkładów naprężeń i traktowanie styku, jako tzw. idealnego. Przedstawione rozważania zakończono ilustrującym je przykładem obliczeniowym.

2. Przekrojowe siły i naprężenia w lepkosprężystym przecie warstwowym

Rys. 2 pokazuje ideowo układ sił wewnętrznych w belce warstwowej w układzie odniesienia xyz , gdzie x jest osią podłużną belki. W celu uproszczenia rozważań przyjmuje się, że obciążenia mają charakter statyczny, przekrój zachowuje swoją płaskość i jest monosymetryczny względem osi z . Pręt składa się z układu n warstw idealnie zespolonych i równoległych do x . Każda z nich niech ma porządkowany indeks $\alpha=1,2,\dots,n$, licząc od spodu.



Rys. 2. Siły wewnętrzne w belce warstwowej o przekroju monosymetrycznym.

Fig. 2. Internal forces in a layered beam of monosymmetrical cross-section.

Przypiszmy z kolei do każdej z warstw przenoszone przez nie siły przekrojowe na podstawie następujących zależności [4]:

$$N = \sum_{\alpha} N_{(\alpha)} = \sum_{\alpha} \int_{A_{(\alpha)}} \sigma_{xx(\alpha)} dA, \quad T = \sum_{\alpha} T_{(\alpha)} = \sum_{\alpha} \int_{A_{(\alpha)}} \sigma_{xz(\alpha)} dA, \quad M = \sum_{\alpha} M_{(\alpha)} = \sum_{\alpha} \int_{A_{(\alpha)}} \sigma_{xx(\alpha)} z dA, \quad (1)$$

gdzie: N, T, M – przekrojowa siła osiowa (w analizowanym przypadku równa zero), tnąca i moment zginający; $N_{(\alpha)}, T_{(\alpha)}, M_{(\alpha)}$ – siła osiowa, tnąca i moment zginający w warstwie α ; $A_{(\alpha)}$ – pole przekroju warstwy α ; $\sigma_{xx(\alpha)}, \sigma_{xz(\alpha)}$ – naprężenie normalne i tnące w warstwie α . Niech naprężenia normalne $\sigma_{xx(\alpha)}$ i odkształcenia linowe $\varepsilon_{xx(\alpha)}$ w warstwie α wzdłuż osi x

będzie łączyć relacja jak w materiale liniowo lepkosprężystym, przy uwzględnieniu odkształcalności zgodnie z modelem standardowym (np. [5]):

$$\sigma_{xx(\alpha)} = \tilde{E}_{(\alpha)} * d\varepsilon_{xx(\alpha)}, \quad \tilde{E}_{(\alpha)} = \frac{E_{(\alpha)}}{1 + \phi_{(\alpha)}} \left(1 + \phi_{(\alpha)} e^{-\beta_{(\alpha)} t} \right) H(t), \quad (2)$$

gdzie: $f * dg = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, przy czym t to czas, a τ to chwila wystąpienia przyrostu dg ; $\tilde{E}_{(\alpha)}, E_{(\alpha)}, \phi_{(\alpha)}, \beta_{(\alpha)}$ – funkcja relaksacji, moduł Younga, współczynnik pełzania i parametr opisujący intensywność przebiegu procesu relaksacji w warstwie α , $H(t)$ – funkcja Heaviside’a. Należy w tym momencie zaznaczyć, że w przypadku, w której jedna z warstw może być ortotropowa (np. z drewna) w prezentowanym modelu przypisane jej parametry $\tilde{E}_{(\alpha)}, E_{(\alpha)}, \phi_{(\alpha)}, \beta_{(\alpha)}$ odnoszą się do tych mierzonych przy jednoosiowym stanie naprężenia wzdłuż osi x . Tym samym, w celu kolejnego uproszczenia, pomija się wpływ drugorzędnych naprężeń, jakie mogą pojawić się w belce w kierunku osi y w efekcie występowania nieidentycznej odkształcalności poprzecznej warstw. Wykorzystując hipotezę o zachowaniu płaskości przekrojów, tzn.:

$$\varepsilon_{xx(\alpha)} = \kappa z \rightarrow \sigma_{xx(\alpha)} = \int_0^t z \tilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau) \dot{\kappa}(\tau) d\tau, \quad (3)$$

gdzie: κ – krzywizna przekroju zginanego, można podać wzory, pozwalające wyliczyć przyrosty krzywizny w analizowanej belce w sposób przybliżony. Biorąc (1₃), (2₁) i (3), otrzymujemy, że:

$$M = \sum_{\alpha} I_{y(\alpha)} \int_0^t \tilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau) \dot{\kappa}(\tau) d\tau \approx \sum_{\alpha} I_{y(\alpha)} \sum_{i=1}^m \tilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau_{(i)}) \Delta\kappa(\tau_{(i)}), \quad (4)$$

$$I_{y(\alpha)} = \frac{b_{(\alpha)} h_{(\alpha)}^3}{12} + b_{(\alpha)} h_{(\alpha)} z_{0(\alpha)}^2,$$

gdzie: $\tau_{(m)}=t$; $\Delta\kappa(\tau_{(i)})$ – skończony przyrost krzywizny, jaki wystąpił między chwilami $\tau_{(i-1)}$ i $\tau_{(i)}$; $I_{y(\alpha)}, b_{(\alpha)}, h_{(\alpha)}, z_{0(\alpha)}$ – moment bezwładności względem osi y , szerokość, wysokość i współrzędna środka ciężkości po osi z warstwy α . Stąd kolejne przyrosty $\Delta\kappa(\tau_{(m)})$ obliczać można jako:

$$\text{dla } m=1: \Delta\kappa(\tau_{(1)}) = \frac{M}{\sum_{\alpha} I_{y(\alpha)} \tilde{E}_{(\alpha)}(0)}, \quad \text{dla } m \geq 2: \Delta\kappa(\tau_{(m)}) = \frac{M - \sum_{\alpha} I_{y(\alpha)} \sum_{i=1}^{m-1} \tilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau_{(i)}) \Delta\kappa(\tau_{(i)})}{\sum_{\alpha} I_{y(\alpha)} \tilde{E}_{(\alpha)}(0)}. \quad (5)$$

Potrzebne do obliczeń $I_{y(\alpha)}$ położenie osi y wyznacza się z kolei z warunku zerowania siły osiowej w przekroju. Biorąc (1₁), (2₁) i (3) otrzymujemy :

$$N = \sum_{\alpha} S_{y(\alpha)} \int_0^t \tilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau) \dot{\kappa}(\tau) d\tau \approx \sum_{\alpha} S_{y(\alpha)} \sum_{i=1}^m \tilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau_{(i)}) \Delta\kappa(\tau_{(i)}) = 0, \quad S_{y(\alpha)} = b_{(\alpha)} h_{(\alpha)} z_{0(\alpha)}, \quad (6)$$

gdzie: $S_{y(\alpha)}$ – moment statyczny warstwy α względem osi y . We wzorze (6) przyrosty krzywizn $\Delta\kappa(\tau_{(m)})$ należy obliczać przy wykorzystaniu (5). Odstępy kolejnych chwil $\tau_{(i)}$ sensownie jest przyjąć w równych interwałach Δt , tzn. $\tau_{(i)} = i \Delta t$ ($i=1, 2, \dots, m$). Oczywiście dokładność obliczeń będzie, tym większa, im mniejsze przyjmujemy Δt .

W następnej kolejności można wyznaczyć rozkład naprężeń tnących w przekroju. Z warunku równowagi sił na oś x , działających na wycinek pręta o długości dx , który znajduje się ponad stykiem warstw k i $k+1$, otrzymujemy, że:

$$\sigma_{xz(k)}^- b_{(k)} dx = \sigma_{xz(k+1)}^+ b_{(k+1)} dx = - \sum_{\alpha=k+1}^n \int_{A(\alpha)} \sigma_{xx(\alpha)} dA + \sum_{\alpha=k+1}^n \int (\sigma_{xx(\alpha)} + d_x \sigma_{xx(\alpha)}) dA, \quad (7)$$

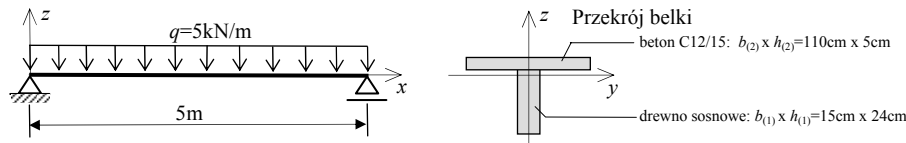
gdzie: $\sigma_{xz(k)}^+$, $\sigma_{xz(k+1)}^-$ – naprężenia tnące u góry warstwy k i u dołu warstwy $k+1$. Wykorzystując (2₁) i (3) otrzymujemy w efekcie z równania (7), że:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz(k)}^- &= \frac{1}{b_{(k)}} \sum_{\alpha=k+1}^n S_{y(\alpha)} \int_{A(\alpha)} \tilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau) \frac{\partial^2(\kappa(\tau, x))}{\partial x \partial \tau} d\tau \approx \frac{1}{b_{(k)}} \sum_{\alpha=k+1}^n S_{y(\alpha)} \sum_{i=1}^m \tilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau_{(i)}) \Delta\kappa'(\tau_{(i)}), \\ \sigma_{xz(k+1)}^+ &= \frac{1}{b_{(k+1)}} \sum_{\alpha=k+1}^n S_{y(\alpha)} \int_{A(\alpha)} \tilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau) \frac{\partial^2(\kappa(\tau, x))}{\partial x \partial \tau} d\tau \approx \frac{1}{b_{(k+1)}} \sum_{\alpha=k+1}^n S_{y(\alpha)} \sum_{i=1}^m \tilde{E}_{(\alpha)}(t-\tau_{(i)}) \Delta\kappa'(\tau_{(i)}), \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie: $\Delta\kappa'(\tau_{(i)})$ – skończony przyrost pochodnej krzywizny po x , jaki wystąpił między chwilami $\tau_{(i-1)}$ i $\tau_{(i)}$. Znając przybliżone rozkłady krzywizn osi pręta dzięki wykorzystaniu relacji (5) w dowolnym przekroju o współrzędnej x , można obliczyć pochodne krzywizny po x , wykorzystując wzory na różnice skończone, a stąd dalej można wyznaczyć $\Delta\kappa'$. Z kolei naprężenia normalne można wyliczyć ze wzoru (3₂) również w sposób przybliżony, całkując go numerycznie, kiedy znane są już z relacji (5) przybliżone przyrosty krzywizn.

3. Przykład obliczeniowy

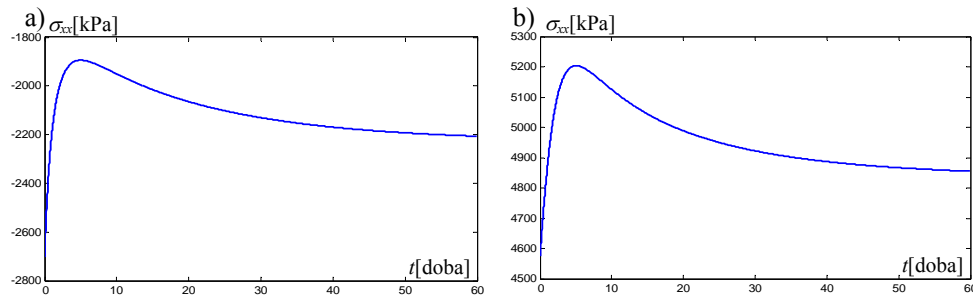
W celu zilustrowania możliwości wykorzystania wzorów wyprowadzonych w punkcie 2, przedstawione zostaną wyniki obliczeń naprężeń w przekrojach przykładowej belki wolnopodpartej o rozpiętości 5m (rys. 3). Belka składa się z dwóch warstw – dolna z drewna sosnowego klasy C27 o przekroju 15cm x 24cm i górna z betonu klasy C12/15 o przekroju 110cm x 5cm) z równomiernym obciążeniem pionowym o wartości 5kN/m, stałym w czasie i przyłożonym w sposób statyczny począwszy od chwili $t=0$. Zakłada się ponadto, że układ w chwili przyłożenia obciążenia znajduje się w ustalonym stanie cieplno-wilgotnościowym w powietrzu o RH=50% i temperaturze 20°C.



Rys. 3. Schemat statyczny belki i jej przekrój.
Fig. 3. The static scheme of beam and its cross-section.

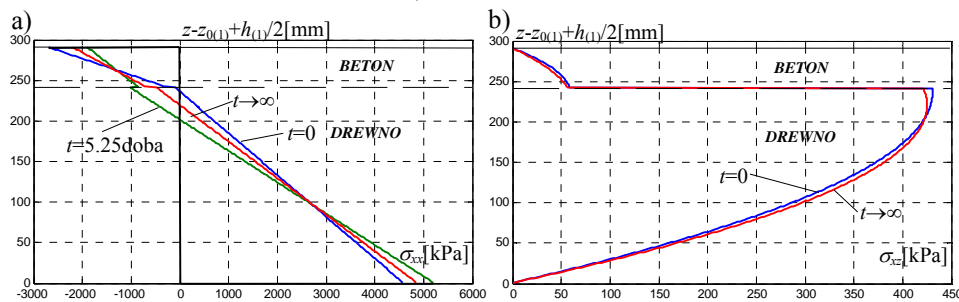
Stąd parametry drewna przyjęto na podstawie [3,6] następująco: $E_{(1)}=12.3\text{GPa}$, $\beta_{(1)}=0.127\text{doba}^{-1}$ i $\phi_{(1)}=2$. Z kolei parametry betonu przy wspomnianych założeniach przyjęto wg [7,10]: $E_{(2)}=20.7\text{GPa}$, $\beta_{(2)}=1.1\text{doba}^{-1}$ i $\phi_{(2)}=4.3$. Obliczenia przeprowadzono w środowisku Matlaba w oparciu o własny program. Na rys. 4 przedstawiono przebiegi w czasie krawędziowych naprężeń normalnych w środku rozpiętości belki. Z kolei na rys. 5 pokazano rozkłady naprężeń tnących nad podporami i normalnych w środku rozpiętości po wysokości przekroju w wybranych chwilach. Przedstawione wykresy

uwidaczniają, że w przypadku przyjętych danych, w okolicach piątego dnia trwania procesu naprężenia w betonie maleją bezwzględnie prawie o 1/3, a w drewnie rosną o ok. 15% w stosunku do wartości początkowych (odpowiadających rozwiązaniu sprężystemu). Ostatecznie w wyniku redystrybucji naprężeń część betonowa przekroju zostaje odciążona, a drewniana dociążona. W przypadku naprężeń tnących nie stwierdzono przy przyjętych danych znaczących odstępstw od wyników, jakie by uzyskano w oparciu o model sprężysty.



Rys. 4. Zmiany w czasie krawędziowych naprężeń normalnych w środku rozpiętości belki: a) od góry w elemencie betonowym, b) od spodu w elemencie drewnianym.

Fig. 4. The time changes of edge normal stresses at the middle of beam span: a) at the top of concrete element, b) at the bottom of wooden element.



Rys. 5. a) Naprężenia normalne w przekroju belki w środku rozpiętości.

b) Naprężenia tnące w przekroju belki nad podporą.

Fig. 5. a) Normal stresses in the cross-section of beam at the middle of span.

b) Shearing stresses in the cross-section of beam at the support.

4. Wnioski

Przeprowadzona analiza pokazuje, że wpływy reologiczne na ekstremalne wartości naprężeń normalnych w stropie zespolonym drewniano-żelbetowym nie są pomijalne i powinno się brać je pod uwagę przy projektowaniu tego typu ustrojów nośnych. Przykładowo uzyskana różnica na poziomie 15% w wartościach naprężeń normalnych w dolnym włóknie elementu drewnianego pomiędzy ujęciem sprężystym i lepkosprężystym pokazuje, że nieuwzględnienie nierównomiernej relaksacji naprężeń w obrębie układu może prowadzić w skrajnie niekorzystnych sytuacjach losowych do uszkodzenia belki drewnianej, jeśli zaprojektowano by ją w oparciu o model sprężysty przy maksymalnym wykorzystaniu nośności. Należy także wspomnieć, że w przypadku układu warstwowego o innych parametrach możliwe jest uzyskanie jeszcze bardziej niekorzystnych wyników w porównaniu do tych z przykładu.

Oznaczenia symboli

- t - czas, time, [s],
 E - moduł Younga, Young's modulus, [Pa],
 \tilde{E} - funkcja relaksacji, relaxation function, [Pa],
 N, T, M - siła osiowa i tnąca, moment zginający; axial and shearing force, bending moment; [N], [N·m];
 α - indeks warstwy, index of a layer,
 β - parametr funkcji relaksacji, relaxation function parameter, [s⁻¹],
 ε_{ij} - składowa tensora odkształceń, strain tensor component, [-],
 ϕ - współczynnik pełzania, creep coefficient, [-],
 κ - krzywizna osi belki, curvature of centre line of a beam, [m⁻¹],
 σ_{ij} - składowa tensora naprężeń, stress tensor component, [Pa],
 τ - chwila, moment, [s],
 $\Delta...$ - skończony przyrost, finite increment.

Literatura

- [1] Czabak M., Analiza statyczno-wytrzymałościowa drewniano-żelbetowych stropów zespolonych, Praca dyplomowa, Politechnika Opolska, Opole, 2012
- [2] Godycki-Ćwirko T., Kleszczewski J., Pawlica J., Wzmacnianie stropów na belkach drewnianych przez ich zespolenie z płytą żelbetową, Tom I, Wyd. 10, PWN, Warszawa, 2006
- [3] Guzy P., Badanie pełzania drewna sosnowego przy zginaniu, Praca dyplomowa, Politechnika Opolska, Opole, 2006
- [4] Kubik J., Mechanika konstrukcji warstwowych, Wyd. TiT, Opole, 1993
- [5] Jakowluk A., Procesy pełzania i zmęczenia w materiałach, WNT, Warszawa, 1993
- [6] Pawlik K., Reologiczne właściwości drewna budowlanego, Rozprawa doktorska Politechnika Opolska, Opole, 2011
- [7] Radziej A., Badanie wpływu porowatości na pełzanie zaprawy cementowej, Praca dyplomowa, Politechnika Opolska, Opole, 2006
- [8] Rudziński L., Naprawy i wzmocnienia konstrukcji drewnianych, Wyd. Pol. Świętokrzyskiej w Kielcach, Kielce, 2000
- [9] Simon A., Analyse zum Trag- und Verformungsverhalten von Straßenbrücken in Holz-Beton-Verbundbauweise, Rozprawa doktorska, Universität Weimar, Weimar, 2008
- [10] PN-EN 1992-1-1, Projektowanie konstrukcji z betonu Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków

ANALYSIS OF RHEOLOGICAL INFLUENCES IN COMBINED WOODEN-FERROCONCRETE FLOORS

Summary

A method estimating normal and shearing stresses in the rib of combined wooden-ferroconcrete floor is presented in the work. The layered linear viscoelastic beam is assumed as a model for the floor rib what enables in the simple way taking into account an influence of different creep rates of wood and concrete on an effort of floor elements.