ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 12/2012
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

RELACJA WZAJEMNOŚCI W ZAGADNIENIU BRZEGOWYM NIELINIOWEJ PIEZOELEKTRYCZNOŚCI

Jerzy WYRWAŁ
Politechnika Opolska, Opole

1. Wprowadzenie

Materiały piezoelektryczne są w inżynierii budowlanej wykorzystywane do nieniszczącej oceny stanu konstrukcji budowlanych. Relacje wzajemności w zagadnieniach piezoelektryczności i elektrostrykcji były analizowane przez autorów wielu opracowań, m.in. [2, 3]; w pierwszej z nich cytowane i omówione są liczne prace polskie i zagraniczne z tego zakresu. Natomiast w niniejszej pracy wyprowadzono relacje wzajemności w przypadku zagadnienia brzegowego nieliniowej piezolektryczności.

2. Zagadnienie brzegowe nieliniowej piezoelektryczności

Na zagadnienie brzegowe nieliniowej fizycznie piezoelektryczności składają się następujące równania [1]:

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0\,, \tag{1}$$

$$D_{i,i}=\rho_e\,, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)=u_{(i,j)}\,, \tag{3}$$

$$E_i=-\Phi_{,i}\,, \tag{4}$$

$$\sigma_{ij}=a_{ijkl}\varepsilon_{kl}-e_{ijk}E_k+\tfrac{1}{2}C_{ijklmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn}-g_{mjikl}E_m\varepsilon_{kl}-\tfrac{1}{2}Q_{ijkl}E_kE_l\,, \tag{5}$$

$$D_i=c_{ij}E_j+e_{ijk}\varepsilon_{jk}+\tfrac{1}{2}g_{ijklm}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{lm}+\tfrac{1}{2}d_{ijk}E_jE_k+Q_{ijkl}E_j\varepsilon_{kl}\,, \tag{6}$$

oraz warunki brzegowe:

$$u_i=\hat{u}_i \text{ na } \partial B_u\,, \tag{7}$$

$$\sigma_{ij}n_j=p_i=\hat{p}_i \text{ na } \partial B_\sigma \quad \partial B_u\cup\partial B_\sigma=\partial B\,, \tag{8}$$

$$\Phi=\hat{\Phi} \text{ na } \partial B_\Phi\,, \tag{9}$$

$$D_kn_k=D=\hat{D} \text{ na } \partial B_D \quad \partial B_\Phi\cup\partial B_D=\partial B\,, \tag{10}$$

gdzie: $a_{ijkl}, c_{ij}, e_{kij}, C_{ijklmn}, d_{ijk}, g_{ijkklm}, Q_{ijkl}$ oznaczają współczynniki materiałowe, przecinek w dolnym indeksie oznacza pochodną cząstkową, ∂B_α $(\alpha = u, p, \Phi, D)$ – powierzchnię, do której są przyłożone odpowiednio zadane na brzegu ciała: przemieszczenie $\hat{u}_i$, siła powierzchniowa $\hat{p}_i$, potencjał elektryczny $\hat{\Phi}$, indukcja elektryczna $\hat{D}$.

3. Operatorowa postać zagadnienia brzegowego

W celu uproszczenia dalszych rozważań, i uczynienia ich bardziej klarownymi, równania (1-10) zostaną przedstawione w następującej, zwartej postaci operatorowej:

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

gdzie:

$$\mathbf{N}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} C_{ijklmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} - g_{ijklm}E_m\varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} Q_{ijkl}E_kE_l \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} g_{ijklm}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{lm} + \frac{1}{2} d_{ijk}E_jE_k + Q_{ijkl}E_j\varepsilon_{kl} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{L}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \sigma_{ij,j} \\ \sigma_{ij} - a_{ijkl}\varepsilon_{kl} + e_{kij}E_k \\ \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ -D_{i,i} \\ -D_i + c_{ij}E_j + e_{ijk}\varepsilon_{jk} \\ -E_i + \Phi_{,i} \\ u_i \\ -p_i \\ -\Phi \\ D \end{Bmatrix}, \tag{12}$$

$$\mathbf{u} = [u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \Phi, E_i, D_i, p_i, u_i, D, \Phi]^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

$$\mathbf{f} = [f_i, 0, 0, \rho_e, 0, 0, \hat{\Phi}, -\hat{u}_i, \hat{p}_i, \hat{\Phi}, \hat{D}]^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

przy czym górny indeks T oznacza macierz transponowaną.

Równanie operatorowe (11) można zapisać w alternatywnej postaci:

$$\left\langle [\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}]^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle = \left\langle [\mathbf{N}(\mathbf{u})]^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle (\mathbf{L}(\mathbf{u}))^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \mathbf{f}^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle = 0, \tag{15}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \left\langle [\mathbf{N}(\mathbf{u})]^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle = & \int_V \left(\tfrac{1}{2} C_{ijklmn}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{mn} - g_{kjiml}E_m\varepsilon_{kl} - \tfrac{1}{2} Q_{ijkl}E_kE_l \right)\varepsilon_{ij}dV \\ & + \int_V \left(\tfrac{1}{2} g_{ijklm}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{lm} + \tfrac{1}{2} d_{ijk}E_jE_k + Q_{ijkl}E_j\varepsilon_{kl} \right)E_i dV \end{aligned}, \tag{16}$$

$$\left\langle (\mathbf{L}(\mathbf{u}))^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle = \int_V \left\{ \sigma_{ij,j} u_i + \left(\sigma_{ij} - a_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \right)\varepsilon_{ij} + \left[\varepsilon_{ij} - \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \right]\sigma_{ij} \right\} dV$$
$$- \int_V \left[D_{i,i}\Phi + \left(D_i - c_{ij}E_j - e_{ijk}\varepsilon_{jk} \right)E_i + \left(E_k - \Phi_{,k} \right)D_k \right] dV \qquad , \tag{17}$$
$$+ \int_{A_u} u_i p_i dA - \int_{A_\sigma} p_i u_i dA - \int_{A_\Phi} \Phi D dA + \int_{A_D} D \Phi dA$$

$$\left\langle \mathbf{f}^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle = \int_V \left(f_i u_i + \rho_e \Phi \right) dV - \int_{A_u} \hat{u}_i p_i dA + \int_{A_\sigma} \hat{p}_i u_i dA + \int_{A_\Phi} \hat{\Phi} D dA - \int_{A_D} \hat{D} \Phi dA \, . \tag{18}$$

4. Relacja wzajemności nieliniowej piezoelektryczności

Niech dane będą dwa niezależne od siebie układy przyczyn $\mathbf{f}, \mathbf{f}'$ i skutków $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ spełniających równanie (15). Wówczas równanie (15) przyjmie odpowiednio postać:

$$\left\langle [\mathbf{N}(\mathbf{u})]^{\mathrm{T}}, \mathbf{u}' \right\rangle + \left\langle (\mathbf{L}(\mathbf{u}))^{\mathrm{T}}, \mathbf{u}' \right\rangle + \left\langle \mathbf{f}^{\mathrm{T}}, \mathbf{u}' \right\rangle = 0 \, , \tag{19}$$

$$\left\langle [\mathbf{N}(\mathbf{u}')]^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle (\mathbf{L}(\mathbf{u}'))^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \mathbf{f}'^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle = 0 \, . \tag{20}$$

Odjęcie powyższych równań stronami prowadzi do relacji:

$$\left\langle [\mathbf{N}(\mathbf{u})]^{\mathrm{T}}, \mathbf{u}' \right\rangle - \left\langle [\mathbf{N}(\mathbf{u}')]^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle (\mathbf{L}(\mathbf{u}))^{\mathrm{T}}, \mathbf{u}' \right\rangle - \left\langle (\mathbf{L}(\mathbf{u}'))^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \mathbf{f}^{\mathrm{T}}, \mathbf{u}' \right\rangle - \left\langle \mathbf{f}'^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle = 0 \, . \tag{21}$$

Zależność:

$$\int_V \left(\sigma_{ij,j} u_i' - D_{j,j}\Phi' \right) dV = -\int_V \left(\sigma_{ij} u_{i,j}' - D_j \Phi_{,j}' \right) dV + \int_A p_i u_i' dA - \int_A D\Phi' dA \, , \tag{22}$$

pozwala sprowadzić (17) do postaci:

$$\left\langle (\mathbf{L}(\mathbf{u}))^{\mathrm{T}}, \mathbf{u}' \right\rangle = \int_V \left[\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}' + \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}' \right) - \left(\sigma_{ij} u_{i,j}' + u_{i,j}\sigma_{ij}' \right) - a_{ijkl}\varepsilon_{ij}'\varepsilon_{kl} + e_{kij}\left(\varepsilon_{ij}' E_k + \varepsilon_{ij} E_k' \right) \right] dV$$
$$- \int_V \left[\left(D_i E_i' + E_i D_i' \right) - c_{ij} E_j E_i' - \left(D_i \Phi_{,i}' + \Phi_{,i} D' \right) \right] dV \qquad ,\tag{23}$$
$$+ \int_{A_u} \left(u_i p_i' + p_i u_i' \right) dA - \int_{A_\Phi} \left(\Phi D' + D\Phi' \right) dA$$

z której wynika, że $\left\langle (\mathbf{L}(\mathbf{u}))^{\mathrm{T}}, \mathbf{u}' \right\rangle - \left\langle (\mathbf{L}(\mathbf{u}'))^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle = 0$.

W konsekwencji (21) przyjmuje ostateczną postać relacji wzajemności nieliniowej fizycznie piezoelektryczności:

$$\left\langle [\mathbf{N}(\mathbf{u})]^{\mathrm{T}}, \mathbf{u}' \right\rangle - \left\langle [\mathbf{N}(\mathbf{u}')]^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \mathbf{f}^{\mathrm{T}}, \mathbf{u}' \right\rangle - \left\langle \mathbf{f}'^{\mathrm{T}}, \mathbf{u} \right\rangle = 0 \, , \tag{24}$$

skąd, po wykorzystaniu zależności (16) i (18) wynika, że:

$$\begin{aligned}
&\int_V \left\{\tfrac{1}{2} C_{ijklmn}\varepsilon_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}\varepsilon_{mn}-\varepsilon'_{kl}\varepsilon'_{mn}\right)-g_{kjiml}\left[\varepsilon_{ij}\left(E_m\varepsilon'_{kl}-E'_m\varepsilon'_{kl}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_{jk}\varepsilon_{lm}E'_i-\varepsilon'_{jk}\varepsilon'_{lm}E_i\right)\right]\right\}dV \\
&+\int_V \left\{\tfrac{1}{2} d_{ijk}E_i\left(E'_jE_k-E'_jE'_k\right)+Q_{ijkl}\left[E_i\left(E'_j\varepsilon_{kl}-E'_j\varepsilon'_{kl}\right)+\tfrac{1}{2}\left(E_kE_l\varepsilon'_{ij}-E'_kE'_l\varepsilon_{ij}\right)\right]\right\}dV \\
&+\int_V \left(f_i u'_i-f'_i u_i\right)dV+\int_V\left(\rho_e\Phi'-\rho'_e\Phi\right)dV \\
&-\int_{A_u}\left(\hat{u}_ip'_i-\hat{u}'_ip_i\right)dA+\int_{A_\sigma}\left(\hat{p}_iu'_i-\hat{p}'_iu_i\right)dA+\int_{A_\Phi}\left(\hat{\Phi}D'-\hat{\Phi}'D\right)dA-\int_{A_D}\left(\hat{D}\Phi'-\hat{D}'\Phi\right)dA=0
\end{aligned} \quad .(25)$$

Otrzymana relacja wzajemności (25) może zostać wykorzystana do poszukiwania analitycznych i numerycznych rozwiązań wielu problemów naukowych i inżynierskich związanych z wykorzystaniem materiałów piezoelektrycznych.

Oznaczenia symboli

D_k - wektor indukcji elektrycznej, electric displacement vector [C m^{-3}],
E_k - wektor natężenia pola elektrycznego, electric field vector [V/m],
f_i - wektor siły objętościowej, mechanical body force [N/m^3],
u_i - wektor przemieszczenia, elastic displacement vector [m],
ε_{ij} - tensor odkształcenia, symmetric strain tensor [-],
Φ - potencjał elektryczny, electric potential [V],
σ_{ij} - tensor naprężenia, symmetric stress tensor [Pa],
ρ_e - gęstość ładunku elektrycznego, electric charge [C/m^3].

Literatura

[1] He J-H., Variational theory for nonlinear piezoelectricity, Facta Universitatis, 2, 10, 2000, 1253-261.
[2] Kubik J., Rzepka J., Symmetry of equations of the electrostriction effect, IV Int. Conference: New Trends in Static and Dynamics of Buildings, Bratislava 2005.
[3] Tressler J.F., Alkoy S., Newham E., Piezoelectric Sensors and Sensor Materials, Journal of Electroceramics, 2, 4, 1998, 257-272.

RECIPROCITY RELATION IN BOUNDARY PROBLEM OF NONLINEAR PIEZOELECTRICITY

Summary

The paper contains derivation of reciprocity theorem for boundary problem of nonlinear piezoelectricity. The results obtained in this work can become the theoretical basis to formulate the numerical solutions of different scientific and engineering problems connected with piezoelectric materials.