ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 12/2012
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

UOGÓLNIONE PRAWO WZMOCNIENIA DLA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO MODELU NIENAWODNIONEGO GRUNTU

Paweł FEDCZUK
Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej

1. Wprowadzenie

Konieczność coraz poprawniejszego opisu zachowania gruntu wymaga stosowania modeli uwzględniających jego częściowe nawodnienie. Przykładem jest sprężysto-plastyczny model nienawodnionego ośrodka gruntowego [1], bazujący na rozwinięciu teorii stanu krytycznego. Ujęty jest on w formie zależności „naprężenie efektywne – odkształcenie i ssanie". Operuje zmodyfikowanym równaniem powierzchni plastyczności Wheelera i Sivakumara [2] i uogólnionym prawem wzmocnienia [3].

W publikacji prezentuje się pełne wyprowadzenie takiego prawa wzmocnienia, zaktualizowanego w stosunku do wcześniejszych. Wiąże ono przyrost plastycznej części wskaźnika porowatości z poziomem naprężenia i ssania.

2. Podstawy teoretyczne

W trójfazowym ośrodku gruntowym pory gruntu są częściowo wypełnione wodą i gazem (występującym w postaci pęcherzyków w wodzie). Stan naprężenia w dowolnym punkcie materialnym takiego ośrodka charakteryzuje składowa σ'_{ij} wektora naprężenia efektywnego **σ'** [4, 3], precyzująca relacje pomiędzy efektywnym naprężeniem średnim p' i całkowitym ścinającym q a ich odpowiednikami netto p^n, ($p^n = \bar{p}^n / p_0$),q^n:

$$\sigma'_{ij} = (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\, u_a) + \delta_{ij}\, \chi\, (u_a - u_w) = \sigma^n{}_{ij} + \delta_{ij}\, \chi\, s \quad (i, j = 1,2,3), \tag{1.1}$$

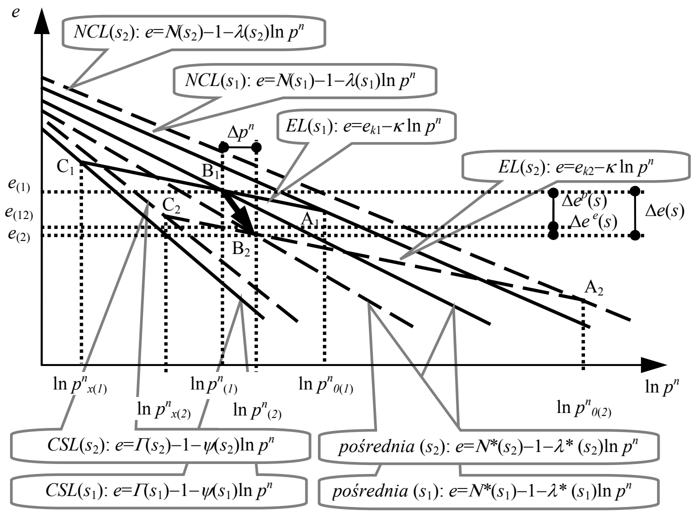
$$p' = p^n + \chi\, s, \tag{1.2}$$

$$q = q' = q^n, \tag{1.3}$$

gdzie: σ_{ij} i $\sigma^n{}_{ij}$ – są składowymi odpowiednio wektorów naprężenia całkowitego **σ** i netto **σ**^{n}, χ – jest parametrem zależnym od poziomu nawodnienia gruntu, $s = \bar{s} / s_0$ – ssaniem, δ_{ij} – deltą Kroneckera. Zachowanie plastyczne nienawodnionego ośrodka gruntowego specyfikuje [1,3] równanie powierzchni plastyczności i prawo wzmocnienia. Powierzchnię plastyczności definiuje zmodyfikowane równanie elipsy Wheelera i Shivakumara [2]:

$$F(q,\ p',\ s) = \frac{(q)^2}{[M(s)\,(p'_x - \chi\, s) + \mu(s)]^2} + \frac{(p' - p'_x)^2}{(p'_0 - p'_x)^2} - 1 = 0\,, \tag{2}$$

Wartości sprzężonych naprężeń średnich netto p'_x i p'_0 określają położenie wierzchołka C i początku A elipsy. $M(s)$ i $\mu(s)$ stanowią parę parametrów modelu, definiujących położenie chwilowej linii stanu krytycznego $CSL(s)$. Wewnątrz elipsy panuje stan sprężysty.



Rys.1. Linie konsolidacji dla wariantu przejścia z poziomu naprężenia (1) do (2)
Fig.1. Consolidation lines for pass variant from stress level (1) to (2)

3. Założenia i uproszczenia

Uogólnione prawo wzmocnienia opiera się na analizie wyników badań [2], ujętych na rys.1 w formie zestawu charakterystyk konsolidacji w układzie „e – log p^n ” (e – wskaźnik porowatości). Zmiana ssania powoduje:

a) przesunięcie i zmianę nachylenia linii konsolidacji (zarówno w stosunku do charakterystyk dla gruntu nawodnionego jak i dla innych poziomów częściowego nawodnienia),
b) nierównoległość i zbieżność linii konsolidacji normalnej *NCL* i stanu krytycznego *CSL* oraz pośrednich (na danym poziomie ssania s wraz ze spadkiem naprężenia p^n).

Podane założenia uzupełnia para następujących uproszczeń. Zestaw wszystkich charakterystyk konsolidacji (*NCL*, *CSL* i pośrednich) dla danego poziomu ssania tworzy wiązkę przecinającą się w jednym punkcie. Nachylenie κ sprężystej linii konsolidacji *EL* ilustrującej odciążenie stałe i niezależne od ssania. Stanowią one wraz założeniami podstawę do wyprowadzenia prawa wzmocnienia w formie różnicowej.

4. Uogólnione prawo wzmocnienia

Proponowane prawo wzmocnienia wiąże przyrost plastycznej części wskaźnika porowatości ze zmianą stanu naprężenia, spowodowaną zmianą ssania. Uwzględnia ono analizę układu charakterystyk konsolidacji w układzie „e – log p^n" (rys. 1) dla przejścia stanu naprężenia (wektor łączący punkty B_1 i B_2) z poziomu (1) (linia ciągła) do (2) (linia przerywana) o wartość Δp^n, spowodowanego zmianą ssania $\Delta s = s_2 - s_1$. Poziom ssania (i) (i=1, 2) charakteryzuje wiązka linii konsolidacji: normalnej *NCL*, stanu krytycznego *CSL*, pośrednich i odprężenia *EL*, zdefiniowanych zależnościami:

$$\begin{matrix} e = N(s_i) - 1 - \lambda(s_i)\ln p^n & e = \Gamma(s_i) - 1 - \psi(s_i)\ln p^n \\ e = N^*(s_i) - 1 - \lambda^*(s_i)\ln p^n & e = e_{ki} - \kappa \ln p^n \end{matrix}, \tag{3}$$

gdzie: $N^*(s_i)$, $\lambda^*(s_i)$ – oznacza parę współczynników równania pośredniej linii konsolidacji (odpowiednio – przesunięcie i nachylenie), natomiast $N(s_i)$, $\lambda(s_i)$, oraz $\Gamma(s_i)$, $\psi(s_i)$ i e_{ki}, κ – analogiczne pary współczynników dla linii *NCL*, *CLS* i *EL*. Położenie punktu przecięcia S($p^n{}_{si}$, e_{si}) wiązki linii *NCL*, *CLS* i pośrednich dla stanu (i) określa para współrzędnych:

$$\ln p^n{}_{si} = \frac{\Gamma(s_i) - N(s_i)}{\psi(s_i) - \lambda(s_i)} \qquad e_{si} = N(s_i) - 1 - \lambda(s_i)\frac{\Gamma(s_i) - N(s_i)}{\psi(s_i) - \lambda(s_i)}. \tag{4}$$

Współczynniki $N^*(s_i)$, $\lambda^*(s_i)$ definiują równanie linii pośredniej (3.c) przechodzącej przez punkty S($p^n{}_{si}$, e_{si}) i B_i($p^n{}_i$, e_i):

$$\lambda^*(s_i) = \frac{e_i - e_{si}}{\ln p^n{}_{si} - \ln p^n{}_{si}} \qquad N^*(s_i) = e_{si} + 1 + \frac{e_i - e_{si}}{\ln p^n{}_{si} - \ln p^n{}_{si}}\ln p^n{}_{si}. \tag{5}$$

Całkowity przyrost wskaźnika porowatości $\Delta e(s)$ i jego sprężystej części $\Delta e^e(s)$ opisuje para zależności oparta odpowiednio na równaniu pośredniej linii konsolidacji i sprężystej linii odprężenia *EL* dla stanów (1) i (2):

$$\begin{aligned} \Delta e(s) &= e_{(2)}(s_2) - e_{(1)}(s_1) = [N^*(s_2) - 1 - \lambda^*(s_2)\ln p^n{}_{(2)}] - [N^*(s_1) - 1 - \\ &\quad \lambda^*(s_1)\ln p^n{}_{(1)}] = N^*(s_2) - N^*(s_1) - \lambda^*(s_2)\ln p^n{}_{(2)} - \lambda^*(s_1)\ln p^n{}_{(1)} \\ \Delta e^e(s) &= e_{(2)}(s_2) - e_{(12)}(s_1) = [e_{\kappa 2} - \kappa \ln p^n{}_{(2)}] - [e_{\kappa 2} - \kappa \ln p^n{}_{(1)}] = \\ &= -\kappa[\ln p^n{}_{(2)} + \ln p^n{}_{(1)}] = \kappa \ln(p^n{}_{(1)} / p^n{}_{(2)}) \end{aligned}. \tag{6}$$

Wprowadzenie relacji (6) do przekształconego prawa addytywności $\Delta e^p(s) = \Delta e(s) - \Delta e^e(s)$ i wyznaczenie z niego zależności na naprężenie średnie netto $p^n{}_{(2)}$, daje końcową postać poszukiwanego prawa wzmocnienia:

$$\begin{gathered} p^n{}_{(2)} = \exp\frac{\alpha - \Delta e^p(s)}{\beta} \\ \alpha = N^*(s_2) - N^*(s_1) - [\kappa - \lambda^*(s_2)]\ln p^n{}_{(1)} \qquad \beta = \kappa - \lambda^*(s_2) \end{gathered}, \tag{7}$$

Uzupełnia je para relacji na wartości naprężeń średnich netto $p^n{}_0$ i $p^n{}_x$, definiujących korektę położenia powierzchni plastyczności F w stanie (2) (czyli rzędnych punktów A_2 i C_2 w układzie „q – p^n"). Ustala się je jako współrzędne punktów przecięcia linii odprężenia $EL(s_2)$ przechodzącej przez punkt $B_2(p^n{}_{(2)}, e_{(2)})$ kolejno z liniami $CSL(s_2)$ i $NCL(s_2)$, uzyskując w efekcie zależności:

$$p^n{}_{0(2)} = \exp\frac{\Gamma(s_2)-\xi}{\psi(s_2)-\kappa} \qquad p^n{}_{x(2)} = \exp\frac{N(s_2)-\xi}{\lambda(s_2)-\kappa} \qquad \xi = 1 - e_{(2)} + \kappa \ln p^n{}_{(2)}, \tag{8}$$

stałe $\Gamma(s_2)$, $\psi(s_2)$, $N(s_2)$, $\lambda(s_2)$ oznaczają współczynniki równań linii konsolidacji *CSL* i *NCL* dla stanu (2) (odpowiednio – przesunięcia i nachylenia).

Wprowadzenie do zależności (8) i (9) przekształconych relacji (1.2)-(1.3) z uwzględnieniem oznaczeń poziomów naprężenia (1) i (2) daje końcową postać prawa wzmocnienia i zależności korygujących położenie powierzchni plastyczności F :

$$p'_{(2)} = \exp\frac{\alpha - \Delta e^p(s)}{\beta} + \chi\, s_2$$

$$p'_{0(2)} = \exp\left[\frac{\Gamma(s_2)-\xi}{\psi(s_2)-\kappa}\right] + \chi\, s_2 \qquad p'_{x(2)} = \exp\left[\frac{N(s_2)-\xi}{\lambda(s_2)-\kappa}\right] + \chi\, s_2\ , \tag{9}$$

$$\alpha = N^*(s_2) - N^*(s_1) - [\kappa - \lambda^*(s_2)]\ln p^n{}_{(1)}$$

$$\beta = \kappa - \lambda^*(s_2) \qquad \xi = 1 - e_{(2)} + \kappa \ln(p'_{(2)} - \chi\, s_2)$$

Literatura

[1] Fedczuk P.: Elasto-plastic model of unsaturated soil, XXXV Zimowa Szkoła Mechaniki Górotworu i Geoinżynierii, Wisła Jawornik 5-9.03.2012r., Górnictwo i Geoinżynieria, 2012 (złożone do publikacji).

[2] Wheeler S.J., Sivakumar V.: An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soil. Geotechnique, Vol. 45, No. 1, 1995, s. 35-53.

[3] Fedczuk P.: Sprężysto-plastyczny model częściowo nawodnionego ośrodka gruntowego, W: Problemy geotechniczne i środowiskowe z uwzględnieniem podłoży ekspansywnych, E. Dembicki, M.K. Kumor, Z. Lechowicz, Wydawnictwa Uczelniane UTP, Bydgoszcz 2009, s. 35-42.

[4] Fredlund D.G., Rahardjo H.: Soil Mechanics for Unsaturated Soils. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

THE GENERALIZED HARDENING RULE FOR ELASTO-PLASTIC MODEL OF UNSATURARED SOIL

Summary

The paper presents the concept of generalized hardening rule for elasto-plastic unsaturated soil model. This rule connects the increment of plastic part of void ratio with stress and suction levels (for changing value of suction).