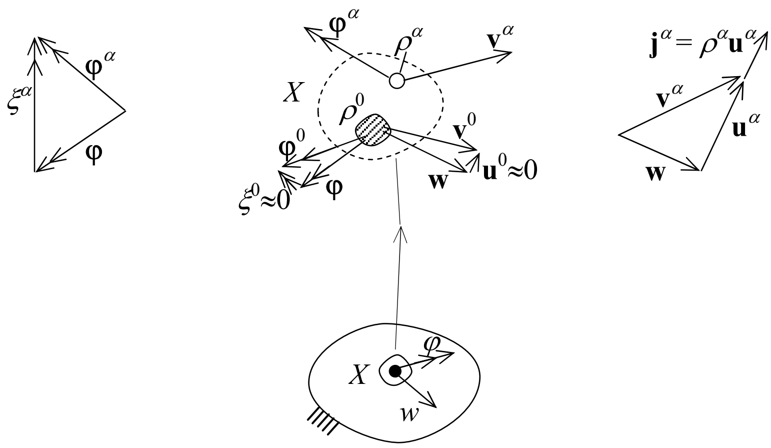
ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 12/2012
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ODPOWIEDNIOŚĆ RÓWNAŃ MIKROPOLARNEJ TEORII MIESZANIN I TERMODYFUZJI

Jan KUBIK
Politechnika Opolska

1. Wprowadzenie

W pracy [3] autor podał równania bilansów termodyfuzji w ciele stałym, które wynikały z ogólnej teorii mieszanin Bowena [1]. Niniejsza praca stanowi rozszerzenie tego rozumowania na mikropolarną termodyfuzję. Punktem wyjścia tych rozważań są bilanse pędu i krętu w mikropolarnej mieszaninie. W wyniku przekształceń dostajemy dodatkową parę równań bilansów momentów bezwładności dla każdego składnika dyfundującego oraz ich mieszaniny. Są to nowe równania bilansowe mikropolarnej termodyfuzji w ciele stałym.



Rys.1. Kinematyka cząstek mieszaniny mikropolarnej

Analizując równania mikropolarnej teorii mieszanin postulujemy postać równań parcjalnych bilansów masy, pędu, krętu i energii. Wymagamy przy tym, aby po zsumowaniu tych bilansów po składnikach uzyskać klasyczne równania zasad zachowania. Centralne miejsce posiada tu zasada zachowania pędu i krętu, która narzuca ograniczenia na kinematykę cząstek mikropolarnej mieszaniny. Okazuje się przy tym, iż spełnienie zasady zachowania pędu i krętu w formie klasycznej wymaga najpierw wprowadzenia parcjalnych bilansów tensorów bezwładności, a następnie bilansu globalnego.

Rozważania z zakresu ruchu mikropolarnej mieszaniny i związanej z nim jako przypadek szczególny termodyfuzji mikropolarnej, rozpoczniemy od analizy ruchu cząstek w ośrodku. Cząstki te posiadają liniowe $\mathbf{v}^{\alpha}$ i obrotowe $\boldsymbol{\varphi}^{\alpha}$ wektory prędkości. Występuje też barycentryczna prędkość liniowa **w** i obrotowa φ oraz odpowiednie wielkości dyfuzyjne, czyli strumienie masy ***j***. Zespół tych wielkości określa, różną od klasycznego opisu mieszanin, kinematykę ośrodka.

W klasycznym eulerowskim opisie ruchu korzystamy z formuły na pochodną zupełną:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho^{\alpha} A_{ij}^{\alpha}\, dV = \int_V \langle \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^{\alpha} A_{ij}^{\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho^{\alpha} A_{ij}^{\alpha} V_k^{\alpha}\right)\rangle\, dV . \tag{1}$$

Wzór ten zastosujemy do analizy parcjalnego bilansu krętu w mikropolarnej mieszaninie.

2. Parcjalny bilans krętu

Wyjściowym punktem rozważań będzie parcjalny bilans krętu mikropolarnej mieszaniny, który w granicznym przejściu powinien prowadzić do klasycznych równań krętu w mikropolarnej termomechanice. Bilans ten dla składnika (α) zawiera klasyczne elementy jak w ciele jednoskładnikowym oraz przekazy pędów i krętów $m_i^{\alpha}, \Lambda_k^{\alpha}, Y_i^{\alpha}$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\int_V \left[\varepsilon_{ijk} x_j \rho^{\alpha} v_k^{\alpha} + J_{ij}^{\alpha}\varphi_j^{\alpha}\right] dV = \int_V \left[\varepsilon_{ijk} x_j \left(\rho^{\alpha} F_k^{\alpha} + \Lambda_k^{\alpha}\right) + Y_i^{\alpha}\right] dV + \\ + \int_A \left[\varepsilon_{ijk} x_j P_k^{\alpha} + m_i^{\alpha}\right] dA \equiv \mathsf{P}_i^{\alpha}\end{aligned} \tag{2}$$

Tutaj P_i^{α} oznacza prawą stronę bilansu krętu składnika α .

Po wyliczeniu pochodnej z lewej strony tego bilansu

$$\int_V \langle \varepsilon_{ijk} x_j \left[\dot{\overline{\rho^{\alpha} v_k^{\alpha}}} + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\rho^{\alpha} v_k^{\alpha} v_l^{\alpha}\right)\right] + \dot{\overline{J_{ij}^{\alpha}\varphi_j^{\alpha}}} + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(J_{ij}^{\alpha}\varphi_j^{\alpha} v_l^{\alpha}\right)\rangle\, dV , \tag{2'}$$

otrzymamy lokalny bilans krętu

$$\int_V \langle \varepsilon_{ijk} x_j \left[v_k^{\alpha} R^{\alpha} + \rho^{\alpha}\frac{d v_k^{\alpha}}{d\,t}\right] + R_{ij}^{\alpha}\varphi_j^{\alpha} + J_{ij}^{\alpha}\frac{d\varphi^{\alpha}}{d\,t}\rangle\, dV = \mathsf{P}_i^{\alpha} . \tag{3}$$

3. Sumaryczny bilans krętu

Po zsumowaniu parcjalnych bilansów krętu powinniśmy otrzymać równania zasady zachowania krętu.

$$\sum_{\alpha}\int_V \langle \varepsilon_{ijk} x_j \left[\left(\dot{\overline{\rho^{\alpha} v_k^{\alpha}}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\rho^{\alpha} v_k^{\alpha} v_l^{\alpha}\right)\right] + \left(\dot{\overline{J_{ij}^{\alpha}\varphi_j^{\alpha}}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(J_{ij}^{\alpha}\varphi_j^{\alpha} v_l^{\alpha}\right)\rangle\, dV = \sum_{\alpha}\mathsf{P}_i^{\alpha} , \tag{4}$$

stąd

$$\int_V \langle \varepsilon_{ijk} x_j \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho w_k) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho w_k w_l) + \sum_\alpha \left(\rho^\alpha u_k^\alpha u_l^\alpha\right)_{,l} \right] + \\ + \left(\dot{\overline{J_{ij}\varphi_j}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(J_{ij}\varphi_j w_l\right) + \sum_\alpha \left(J_{ij}^\alpha \varphi_j^\alpha u_l^\alpha\right)_{,l} \rangle \, dV \quad , \tag{5}$$

A dalej

$$\int_V \langle \varepsilon_{ijk} x_j \left[w_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l}(\rho w_l) \right) + \rho \left(\frac{\partial w_k}{\partial t} + w_l \frac{\partial w_k}{\partial x_l} \right) + \sum_\alpha \left(\rho^\alpha u_k^\alpha u_l^\alpha\right)_{,l} \right] + \\ + \left(\frac{\partial J_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(J_{ij} w_l\right) \right)\varphi_j + J_{ij}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + w_l \frac{\partial}{\partial x_l}(\varphi_j) \right) + \sum_\alpha \left(J_{ij}^\alpha \varphi_j^\alpha u_l^\alpha\right)_{,l} \rangle \, dV = \sum_\alpha \mathrm{P}_i^\alpha \quad . \tag{6}$$

Po uporządkowaniu tych równań uzyskamy równania sumarycznego krętu ośrodka

$$\int_V \langle \varepsilon_{ijk} x_j \left(\rho \frac{d w_k}{d t} + \sum_\alpha \left(\rho^\alpha u_k^\alpha u_l^\alpha\right)_{,l} \right) + J_{ij} \frac{d \varphi_j}{d t} + \sum_\alpha \left(J_{ij}^\alpha \varphi_j^\alpha u_l^\alpha\right)_{,l} \rangle \, dV = \sum_\alpha \mathrm{P}_i^\alpha \, . \tag{7}$$

Ostatecznie, po pominięciu tensorów $\sum_\alpha \rho^\alpha u_k^\alpha u_l^\alpha \approx 0$ i $\sum_\alpha J_{ij}^\alpha \varphi_j^\alpha u_l^\alpha \approx 0$ otrzymamy klasyczny bilans krętu jak w teorii ośrodka jednoskładnikowego(por.[2],[4]).

$$\int_V \left[\varepsilon_{ijk} x_j \rho \frac{d w_k}{d t} + J_{ij} \frac{d \varphi_j}{d t} \right] dV = \sum_\alpha \mathrm{P}_i^\alpha \, . \tag{8}$$

Z porównania równania (8) i (6) wynika, iż zniknąć powinny składniki w nawiasach przy $w_k(\;)$ i $(\;)\varphi_i$ w równaniu (6).

Prowadzi to do relacji:

$$\frac{\partial \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho^\alpha v_k^\alpha\right) = R^\alpha \xrightarrow{\sum} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho w_k) = 0 \qquad 0^\alpha \longrightarrow \mathbf{v}^\alpha \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} J_{ij}^\alpha + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(J_{ij}^\alpha v_l^\alpha\right) = R_{ij}^\alpha \xrightarrow{\sum} \frac{\partial J_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(J_{ij} w_k) = 0 \qquad 0^\alpha \longrightarrow \varphi^\alpha \tag{10}$$

Zauważmy, iż spełnienie bilansu masy, pędu i krętu w mikropolarnym ośrodku wieloskładnikowym wymaga wprowadzenia do rozważań dodatkowej pary bilansów tensorów bezwładności oraz warunków $\sum_\alpha R^\alpha = 0,\ \sum_\alpha R_{ij}^\alpha = 0.$ W przytoczonych równaniach symbolami $\rho^{\alpha}, \rho, I_{ij}^{\alpha}, I_{ij}, v_i^{\alpha}, u_i^{\alpha}, w_i, \varphi_i^{\alpha}, \varphi^{\alpha}, F_i^{\alpha}, \lambda_k^{\alpha}, Y_k^{\alpha}, m_i^{\alpha}, R^{\alpha}, R_{ij}^{\alpha}, \varepsilon_{ijk}$, oznaczono kolejno: gęstość składnikową α i ośrodka, parcjalny i globalny tensor bezwładności, prędkości: składnika, dyfuzyjna i barycentryczna, prędkość obrotową składnika i ośrodka, parcjalna siła masowa, przekaz pędu i krętu do składnika α, parcjalny moment, klasyczne i rotacyjne źródła masy oraz symbol permutacyjny.

Z przeprowadzonych rozważań wnosimy, iż wyposażając składniki dyfundujące względem szkieletu w parcjalne prędkości obrotowe musimy spełnić nie tylko parcjalne i sumaryczne bilanse masy, ale jeszcze dodatkowo kolejną parę równań (10) , które odpowiadają bilansom momentów bezwładności w mikropolarnej termodyfuzji w ciele stałym. Równania te stanowią dodatkowe więzy narzucone na ruch mikropolarnej dyfuzji.

W dalszej kolejności należy dokonać podobnych uogólnień pozostałych bilansów zagadnień termomechaniki ciał wieloskładnikowych.

Literatura

[1] Bowen R.M.: *Theory of mixtures* ,Continuum Physics III, Academic Press, New York 1976.

[2] Dyszlewicz J. *Mikropolar Theory of Elasticity*, Springer Verlag, Berlin 2004.

[3] Kubik J. *The correspondence between equations of thermodiffusion and theory of mixtures.* Acta Mechanica 70, 51-56 1986

[4] Nowacki W. *Teoria niesymetrycznej sprężystości* PWN Warszawa 1973

CORRESPONDENCE OF MICROPOLAR MIXTURE THEORY AND THERMODIFFUSION EQUATIONS

Summary

The mass and momentum balances in micropolar mixture theory and thermodiffusion is analysed. One can conclude that not only local and global mass balances should be fulfilled but also local and global inertia moment should be considered. As the consequence we should make similar generalization in reminding balance.