ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 13/2013
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ZASADA WARIACYJNA ELEKTROSTRYKCJI

Jerzy WYRWAŁ
Politechnika Opolska, Opole

1. Wprowadzenie

Zjawisko elektrostrykcji jest rezultatem obniżenia się energii potencjalnej dipoli indukowanych przez przyłożone do ośrodka pole elektryczne; powoduje ono odkształcenie materiału. W odróżnieniu od odwrotnego zjawiska piezoelektrycznego, gdzie deformacja materiału zależy od znaku pola elektrycznego (odkształcenie jest liniową funkcją natężenia przyłożonego pola), w przypadku elektrostrykcji odkształcenie materiału lub powstałe w nim naprężenia są proporcjonalne do kwadratu natężenia zewnętrznego pola elektrycznego (zmiana wymiarów ciała zachodzi w jednym kierunku, niezależnie od kierunku przyłożonego pola elektrycznego). Do najczęściej wykorzystywanych materiałów elektrostrykcyjnych należą: elastomery dielektryczne, polimery elektroaktywne i ceramika elektrostrykcyjna. Do zalet tej ostatniej można zaliczyć wysoką wartość przenikalności dielektrycznej, mały współczynnik rozszerzalności, możliwość uzyskiwania wysokich wartości naprężeń rozciągających; nie trzeba jej też polaryzować [1]. Wykorzystywana jest ona do budowy wszelkiego rodzaju przetworników elektromechanicznych. Materiały elektrostrykcyjne mogą być także wykorzystywane w nastawnikach, a także różnego rodzaju elementach bionaśladowczych (np. sztuczne mięśnie). Podstawową zaletą takich elementów jest mała waga, szybkość działania oraz brak zakłóceń akustycznych.

Możliwość przetworzenia energii elektrycznej na działanie mechaniczne, jaką dają materiały elektrostrykcyjne, pozwala na uzyskanie za pomocą odpowiednich urządzeń, zwanych aktuatorami (aktywatorami) pewnych użytecznych efektów praktycznych wykorzystywanych w różnego rodzaju nieniszczących technikach pomiarowych. W inżynierii budowlanej urządzenia te są wykorzystywane do monitorowania stanu konstrukcji i wykrywania wad materiałów konstrukcyjnych [2].

Poza wspomnianym wyżej aspektem praktycznym elektrostrykcji istnieje też aspekt naukowy tego zjawiska. Na podkreślenie zasługuje fakt, iż zjawisko elektrostrykcji jest nieliniowe fizycznie i opisuje je układ sprzężonych równań różniczkowych (pełne sprzężenie pola mechanicznego z elektrycznym). Trudno jest zatem znaleźć dokładne rozwiązanie formułowanych zagadnień brzegowych o znaczeniu praktycznym. Ułatwić to może wariacyjne ujęcie elektrostrykcji, które można wykorzystać do poszukiwania przybliżonych analitycznych (np. metodą RITZA) oraz numerycznych (np. MES) rozwiązań zagadnień brzegowych problemów naukowych i inżynierskich związanych z wykorzystaniem materiałów elektrostrykcyjnych.

Niniejsza praca jest poświęcona sformułowaniu funkcjonału wariacyjnego elektrostrykcji. Wykorzystane w tym celu zostanie twierdzenie, z którego wynikają warunki i postać takiego funkcjonału [3].

2. Zagadnienie brzegowe

Równania opisujące zjawisko elektrostrykcji można sprowadzić do następującego układu sprzężonych, nieliniowych równań tensorowych [4]:

$$\begin{aligned} a_{ijkl}u_{k,lj} - \tfrac{1}{2}Q_{ijkl}\left(\Phi_{,k}\Phi_{,l}\right)_{,j} + f_i &= 0, \\ c_{kl}\Phi_{,lk} + Q_{ijkl}\left(u_{i,j}\Phi_{,l}\right)_{,k} + \rho_e &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

który po przekształceniach można też zapisać jako

$$\begin{aligned} a_{ijkl}u_{k,lj} - Q_{ijkl}\Phi_{,k}\Phi_{,lj} + f_i &= 0, \\ c_{kl}\Phi_{,lk} + Q_{ijkl}\left(u_{i,jk}\Phi_{,l} + u_{i,j}\Phi_{,lk}\right) + \rho_e &= 0, \end{aligned} \tag{1'}$$

gdzie przecinek w dolnym indeksie oznacza pochodną cząstkową, zaś powtarzające się indeksy dolne wskazują na sumowanie. Występujące w powyższych wzorach współczynniki materiałowe $a_{ijkl}, c_{kl}, Q_{ijkl}$ charakteryzują się następującymi symetriami:

$$\begin{aligned} a_{ijkl} &= a_{klij} = a_{jikl} = a_{ijlk}, \\ c_{kl} &= c_{lk}, \\ Q_{ijkl} &= Q_{jikl} = Q_{ijlk}. \end{aligned} \tag{2}$$

Do powyższych równań dołączymy następujące warunki brzegowe

$$\begin{aligned} u_i = \hat{u}_i \text{ na } A_u, \quad & \left(a_{ijkl}u_{k,l} - \tfrac{1}{2}Q_{ijkl}\Phi_{,k}\Phi_{,l}\right)n_j - \hat{p}_i = 0 \text{ na } A_\sigma, \quad A_u \cup A_\sigma = A, \\ \Phi = \hat{\Phi} \text{ na } A_\Phi, \quad & \left(c_{kl}\Phi_{,l} + Q_{ijkl}u_{i,j}\Phi_{,l}\right)n_k + \hat{D} = \text{ na } A_D, \quad A_\Phi \cup A_D = A. \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie A_α $(\alpha = u, p, \Phi, D)$ są częściami powierzchni ciała, do których są przyłożone zadane: przemieszczenia $\hat{u}_i$, siły powierzchniowe $\hat{p}_i$, potencjał elektryczny $\hat{\Phi}$ i indukcja elektryczna $\hat{D}$.

Równania (1) wraz z warunkami brzegowymi tworzą zagadnienie brzegowe, w którym niewiadomymi są trzy składowe wektora przemieszczenia u_i i potencjał elektryczny Φ.

3. Zasada wariacyjna

W celu uproszczenia i skrócenia dalszych rozważań zapiszemy równania (1) oraz warunki brzegowe (3_2) i (3_4) w następującej, operatorowej postaci:

$$N(u) + f = 0, \tag{4}$$

gdzie

$$N(u)=\begin{Bmatrix} -a_{ijkl}u_{k,lj}+\frac{1}{2}Q_{ijkl}\left(\Phi_{,k}\Phi_{,l}\right)_{,j} \\ c_{kl}\Phi_{,lk}+Q_{ijkl}\left(u_{i,j}\Phi_{,l}\right)_{,k} \\ \left(a_{ijkl}u_{k,l}-\frac{1}{2}Q_{ijkl}\Phi_{,k}\Phi_{,l}\right)n_j \\ -\left(c_{kl}\Phi_{,l}+Q_{ijkl}u_{i,j}\Phi_{,l}\right)n_k \end{Bmatrix},\quad u=\begin{Bmatrix} u_i \\ \Phi \\ u_i \\ \Phi \end{Bmatrix},\quad f=\begin{Bmatrix} -f_i \\ \rho_e \\ -\hat{p}_i \\ \hat{D} \end{Bmatrix}. \tag{5}$$

przy czym $N(\cdot)$ jest operatorem nieliniowym, u – elementem szukanym, zaś f – danym.

Warunki istnienia funkcjonału wariacyjnego $F(u_i,\Phi)$, z którego jako równanie EULERA-LAGRANGE'A otrzymujemy nieliniowe równanie operatorowe (4), a także jego postać, określone są przez twierdzenie VAINBERGA [3]. Z twierdzenia tego wynika, że funkcjonał taki istnieje, jeśli operator rozpatrywanego zadania jest potencjalny. Problem wyznaczenia postaci takiego funkcjonału należy do zagadnień odwrotnych rachunku wariacyjnego [5].

Aby sprawdzić potencjalność operatora $N(\cdot)$ sprowadzimy zagadnienie brzegowe (4) do następującej, ekwiwalentnej postaci:

$$\langle N(u)+f,u\rangle=\langle N(u),u\rangle+\langle f,u\rangle=0, \tag{6}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \langle N(u),u\rangle &= \int_V\left[-a_{ijkl}u_{k,lj}+\frac{1}{2}Q_{ijkl}\left(\Phi_{,k}\Phi_{,l}\right)_{,j}\right]u_i\,dV+\int_V\left[c_{kl}\Phi_{,lk}+Q_{ijkl}\left(u_{i,j}\Phi_{,l}\right)_{,k}\right]\Phi dV \\ &+\int_{A_\sigma}\left(a_{ijkl}u_{k,l}-\frac{1}{2}Q_{ijkl}\Phi_{,k}\Phi_{,l}\right)n_j u_i\,dA-\int_{A_D}\left(c_{kl}\Phi_{,l}+Q_{ijkl}u_{i,j}\Phi_{,l}\right)n_k\Phi dA, \\ \langle f,u\rangle &= -\int_V\left(f_i u_i-\rho_e\Phi\right)dV-\int_{A_\sigma}\hat{p}_i u_i\,dA+\int_{A_D}\hat{D}\Phi dA. \end{aligned} \tag{7}$$

Wykorzystując twierdzenie GAUSSA-OSTROGRADSKIEGO

$$\begin{aligned} &\int_V\left(-a_{ijkl}u'_{k,l}+\frac{1}{2}Q_{ijkl}\Phi_{,k}\Phi_{,l}\right)_{,j}u_i\,dV+\int_V\left[c_{kl}\Phi_{,l}+Q_{ijkl}\left(u_{i,j}\Phi_{,l}\right)\right]_{,k}\Phi dV \\ &=\int_V\left(a_{ijkl}u_{k,l}-\frac{1}{2}Q_{ijkl}\Phi_{,k}\Phi_{,l}\right)u_{i,j}\,dV-\int_V\left[c_{kl}\Phi_{,l}+Q_{ijkl}\left(u_{i,j}\Phi_{,l}\right)\right]\Phi_{,k}\,dV \\ &+\int_{A_\sigma}\left(-a_{ijkl}u_{k,l}+\frac{1}{2}Q_{ijkl}\Phi_{,k}\Phi_{,l}\right)n_j u_i\,dA+\int_{A_D}\left[c_{kl}\Phi_{,l}+Q_{ijkl}\left(u_{i,j}\Phi_{,l}\right)\right]n_k\Phi dA \end{aligned} \tag{8}$$

uzyskujemy słabe sformułowanie zadania brzegowego określonego równaniem (4)

$$\begin{aligned} \langle N(u),u\rangle &= \int_V\left(a_{ijkl}u_{k,l}-\frac{1}{2}Q_{ijkl}\Phi_{,k}\Phi_{,l}\right)u_{i,j}\,dV-\int_V\left[c_{kl}\Phi_{,l}+Q_{ijkl}\left(u_{i,j}\Phi_{,l}\right)\right]\Phi_{,k}\,dV \\ &-\int_V\left(f_i u_i-\rho_e\Phi\right)dV-\int_{A_\sigma}\hat{p}_i u_i\,dA+\int_{A_D}\hat{D}\Phi dA. \end{aligned} \tag{9}$$

Zgodnie z twierdzeniem VAINBERGA operator $N(\cdot)$ jest potencjalny, gdy spełniony jest warunek symetrii [3]

$$\langle dN(u,u'),u''\rangle = \langle dN(u,u''),u'\rangle, \tag{10}$$

gdzie $dN(u,u')$ oznacza różniczkę GATEAUX operatora $N(\cdot)$, przy czym zakładamy, że składowe elementów u' oraz u'' na brzegu obszaru spełniają następujące warunki:

$$\begin{aligned} &u_i+\alpha u_i' = u_i+\alpha u_i'' = \hat{u}_i \rightarrow u_i' = u_i'' = 0 \text{ na } A_u, \quad , \\ &\Phi + \alpha\Phi' = \Phi + \alpha\Phi'' = \hat{\Phi} \rightarrow \Phi' = \Phi'' = 0 \text{ na } A_\Phi. \end{aligned} \tag{11}$$

Warunek (10) jest wystarczający, aby istniał funkcjonał wariacyjny $F(u)$, którego gradientem (różniczką GATEAUX) jest operator $N(u)+f$.

W rozważanym przypadku

$$dN(u,u') = \frac{d}{d\alpha} N(u+\alpha u')\bigg|_{\alpha=0} = \begin{Bmatrix} -a_{ijkl}u'_{k,lj} + Q_{ijkl}\left(\Phi_{,k}\Phi'_{,l}\right)_{,j} \\ c_{kl}\Phi'_{,lk} + Q_{ijkl}\left(u'_{i,j}\Phi_{,l} + u_{i,j}\Phi'_{,l}\right)_{,k} \\ \left(a_{ijkl}u'_{k,l} - Q_{ijkl}\Phi_{,k}\Phi'_{,l}\right)n_j \\ -\left[c_{kl}\Phi'_{,l} + Q_{ijkl}\left(u'_{i,j}\Phi_{,l} + u_{i,j}\Phi'_{,l}\right)\right]n_k \end{Bmatrix}. \tag{12}$$

Podstawiając do zależności (7_1) operator $dN(u,u')$ w miejsce operatora $N(u)$ oraz element u'' w miejsce elementu u otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle dN(u,u'),u''\rangle &= \int_V \left(-a_{ijkl}u'_{k,l} + Q_{ijkl}\Phi_{,k}\Phi'_{,l}\right)_{,j} u_i'' dV \\ &+ \int_V \left[c_{kl}\Phi'_{,l} + Q_{ijkl}\left(u'_{i,j}\Phi_{,l} + u_{i,j}\Phi'_{,l}\right)\right]_{,k} \Phi'' dV \\ + \int_{A_\sigma} \left(a_{ijkl}u'_{k,l} - Q_{ijkl}\Phi_{,k}\Phi'_{,l}\right) n_j u_i'' dA &- \int_{A_D} \left[c_{kl}\Phi'_{,l} + Q_{ijkl}\left(u'_{i,j}\Phi_{,l} + u_{i,j}\Phi'_{,l}\right)\right] n_k \Phi'' dA. \end{aligned} \tag{13}$$

Wykorzystując ponownie twierdzenie GAUSSA-OSTROGRADSKIEGO oraz warunki brzegowe (11) otrzymujemy, że

$$\langle dN(u,u'),u''\rangle = \int_V \left[a_{ijkl}u'_{k,l}u''_{i,j} - \left(c_{kl} + Q_{ijkl}u_{i,j}\right)\Phi'_{,k}\Phi''_{,l} - Q_{ijkl}\Phi_{,k}\left(u''_{i,j}\Phi'_{,l} + u'_{i,j}\Phi''_{,l}\right)\right] dV, \tag{14}$$

Co dowodzi spełnienia warunku symetrii (10) a tym samym potencjalności operatora $N(\cdot)$. Zatem, zgodnie z twierdzeniem VAINBERGA, w przypadku zagadnienia brzegowego (4) istnieje funkcjonał wariacyjny

$$F(u) = \int_0^1 \langle N(\alpha u),u\rangle d\alpha + \langle f,u\rangle, \tag{15}$$

gdzie

$$\int_0^1 \langle N(\alpha u), u\rangle d\alpha = \int_V \left[-\tfrac{1}{2} a_{ijkl} u_{k,lj} + \tfrac{1}{6} Q_{ijkl} \left(\Phi_{,k}\Phi_{,l}\right)_{,j} \right] u_i dV$$
$$+ \int_V \left[\tfrac{1}{2} c_{kl} \Phi_{,lk} + \tfrac{1}{3} Q_{ijkl} \left(u_{i,j}\Phi_{,l}\right)_{,k} \right] \Phi dV \tag{16}$$
$$+ \int_{A_\sigma} \left(\tfrac{1}{2} a_{ijkl} u_{k,l} - \tfrac{1}{6} Q_{ijkl} \Phi_{,k}\Phi_{,l} \right) n_j u_i dA - \int_{A_D} \left(\tfrac{1}{2} c_{kl} \Phi_{,l} + \tfrac{1}{3} Q_{ijkl} u_{i,j} \Phi_{,l} \right) n_k \Phi dA,$$

zaś $\langle f, u \rangle$ określa relacja (7_2). Po wykorzystaniu twierdzenia GAUSSA-OSTROGRADSKIEGO oraz dalszych przekształceniach, dostajemy, że

$$\int_0^1 \langle N(\alpha u), u\rangle d\alpha = \int_V \left(\tfrac{1}{2} a_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} - \tfrac{1}{2} c_{kl} \Phi_{,k}\Phi_{,l} - \tfrac{1}{2} Q_{ijkl} u_{i,j} \Phi_{,k}\Phi_{,l} \right) dV \tag{17}$$

i w konsekwencji funkcjonał wariacyjny (15) przyjmuje ostateczną postać

$$F(u_i, \Phi) = \int_V H(u_i, \Phi) dV - \int_V \left(f_i u_i - \rho_e \Phi \right) dV - \int_{A_\sigma} \hat{p}_i u_i dA + \int_{A_D} \hat{D} \Phi dA, \tag{18}$$

gdzie (co warto podkreślić)

$$H(u_i, \Phi) = \tfrac{1}{2} a_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} - \tfrac{1}{2} c_{kl} \Phi_{,k}\Phi_{,l} - \tfrac{1}{2} Q_{ijkl} u_{i,j} \Phi_{,k}\Phi_{,l} \tag{19}$$

jest entalpią elektryczną [6] wyrażoną w przemieszczeniach u_i i potencjale elektrycznym Φ.

Jak łatwo sprawdzić, z warunku stacjonarności funkcjonału (18), czyli zerowania się jego wariacji

$$\delta F(u_i, \Phi) = 0, \quad \rightarrow \langle N(u) + f, u \rangle = 0 \tag{20}$$

wynika równanie operatorowe (4), a tym samym równania EULERA-LAGRANGE'A w postaci równań (1) oraz warunków brzegowe (3_2) i (3_4) tworzące zagadnienie brzegowe elektrostrykcji. Zależność (20) stanowi treść zasady wariacyjnej elektrostrykcji.

Otrzymana zasada wariacyjna pozwala na uzyskiwanie przybliżonych postaci poszukiwanych funkcji i może zostać wykorzystana do poszukiwania analitycznych (np. RITZA) oraz numerycznych (np. MES) rozwiązań zagadnień brzegowych problemów naukowych i inżynierskich związanych z wykorzystaniem materiałów elektrostrykcyjnych.

Oznaczenia symboli

f_i wektor siły objętościowej, mechanical body force [N/m^3],

u_i wektor przemieszczenia, elastic displacement vector [m],

Φ potencjał elektryczny, electric potential [V],

ρ_e gęstość ładunku elektrycznego, electric charge [C/m^3].

Literatura

[1] Makarewicz G.: Materiały inteligentne – zastosowanie w systemach aktywnej redukcji hałasu i drgań. Bezpieczeństwo pracy, 12, 2005, 15÷19.
[2] Rzepka J., Teoretyczne podstawy zastosowania piezopolimerów do diagnostyki konstrukcji inżynierskich (rozprawa doktorska), Opole 2009.
[3] Vainberg M. M., Potential operators and the variational theory of nonlinear operator equations, Uspekhi Mat. Nauk, 10, 1955, 223÷227.
[4] Wyrwał J., Zasada wzajemności w elektrostrykcji, Roczniki Inżynierii Budowlanej, 13, 2013, .
[5] Głazunov J., Metody wariacyjne, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków 2005
[6] Tang Y., Ballarini R., A theoretical analysis of the breakdown of electrostrictive oxide film on metal, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 59, 2011, 178÷193.

VARIATIONAL PRINCIPLE OF ELECTROSTRICTION

Summary

The paper shows how to transform a given nonlinear boundary problem of electrostriction into a variational formulation. A sufficient condition for the construction of variational principle is formulated in the theorem of VAINBERG. The results obtained in this work can become the theoretical basis to formulate the numerical solutions of different scientific and engineering problems connected with electrostrictive materials.