ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 2013
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

SYMETRIE SZCZEGÓLNYCH TEORII GRADIENTOWYCH

Jan KUBIK
Politechnika Opolska, Opole

Gradientowe teorie wynikają z klasycznych ujęć mechaniki, są jednak od nich bardziej skomplikowane. Wprowadza się w nich dodatkową parę tensorów gradientowych do opisu stanu naprężeń i odkształceń [1,4]. W tej sytuacji warto wykorzystać rozwiązania zadań brzegowych klasycznej sprężystości do poszukiwania rozwiązań analogicznych zadań brzegowych w teoriach gradientowych. W pierwszej kolejności należy porównać pary równań fizycznych: zadania klasycznego i z uwzględnieniem tensora gradientu odkształceń. Takie porównania są możliwe po znalezieniu twierdzeń o wzajemności między wyszczególnionymi parami równań fizycznych [3]. Jest to też celem przedstawionych w niniejszej pracy rozważań

Będziemy więc badać symetrię występującą między szczególnymi przypadkami teorii gradientowych, a mianowicie: lepkosprężystością, gdzie oprócz tensora odkształceń uwzględnia się jego gradient, a teorią pełną. Podobnie można porównywać pełne i uproszczone równania fizyczne na tensor naprężeń gradientowych.

1. Równania fizyczne teorii

Ogólna postać równań fizycznych lepkosprężystości na tensory naprężeń (σ_{ij} , τ_{ijk}) które są zależne od tensorów odkształceń (ε_{ij} , η_{ijk}) jest następująca (por.[4]):

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} * d\,\varepsilon_{kl} + e_{ijklm} * d\,\eta_{klm} \qquad (1)$$

$$\tau_{ijk} = e_{ijklm} * d\,\varepsilon_{lm} + G_{ijklmn} * d\,\eta_{lmn} \qquad (2)$$

Zadania brzegowe określają ponadto równania geometryczne definiujące klasyczne i gradientowe tensory odkształceń w ciele

$$2\varepsilon_{ij} = u_i,_j + u_j,_i\,, \qquad \eta_{ijk} = \varepsilon_{ij},_k \qquad (3)$$

oraz zmodyfikowane równania ruchu ujmujące również tensor naprężeń gradientowych

$$\left(\sigma_{ij} + \tau_{ijk},_k\right),_j + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (4)$$

Układ ten dopełniają warunki brzegowe na zadane naprężenia i odkształcenia występujące na brzegu ośrodka oraz warunki na początkowe przemieszczenia i ich prędkości.

$$\left(\sigma_{ij} + \tau_{ijk},_k\right)n_j\Big|_{A_\sigma} = P_i\,,\;\; u_i\Big|_{A_u} = \overset{o}{u}_i\,,\;\; u_i\left(x_k, 0_+\right) = u_{i0}\,,\;\; \dot{u}_i\left(x_k, 0_+\right) = v_{i0} \qquad (5)$$

Przytoczony układ równań pozwala sformułować podstawowe zadanie początkowo-brzegowe w lepkosprężystości gradientowej. W dalszej kolejności będziemy analizowali szczególne przypadki tych równań

W pracy symbolami σ_{ij}, τ_{ijk}, ε_{ij}, $\eta_{ijk} = \varepsilon_{ij},_k$, u_i, ρF_i, $\rho \ddot{u}_i$, P_i, $\widetilde{P}_i$, $f * df$, E_{ijkl}, e_{ijklm}, G_{ijklmn} oznaczono kolejno tensory naprężeń i odkształceń klasycznych i gradientowych, wektor przemieszczeń, siłę masową i bezwładności oraz siły powierzchniowe i funkcje relaksacji zaś symbol * oznacza iloczyn splotowy Stieltjesa

$$f_1 * df_2 = \int_{-\infty}^{t} f_1(t-\tau)\,df_2(\tau) \;\;,\;\; \tau = \begin{cases} t & \tau \in [-\infty, t) \\ t & \tau \notin [-\infty, t) \end{cases}$$

Wszystkie pola są funkcjami miejsca i czasu, zaś $(\;),_k \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_k}$.

2. Równania teorii szczególnych

Porównywać będziemy pary równań fizycznych teorii szczególnych wynikające z równań (1) i (2). Pierwszy przypadek szczególny określają równania na klasyczne naprężenia

$$\sigma'_{ij} = E_{ijkl} * d\varepsilon'_{kl} \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} = e_{ijklm} * d\eta_{klm} + E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} \qquad (7)$$

oraz pozostałe równania:(3)-(5) wyznaczające zadania brzegowe.
Natomiast drugi, szczególny układ dotyczy naprężeń gradientowych i ma postać

$$\tau'_{ijk} = G_{ijklmn} * d\eta'_{lmn} \qquad (8)$$

$$\tau_{ijk} = G_{ijklmn} * d\eta_{lmn} + e_{ijklm} * d\varepsilon_{lm} \qquad (9)$$

W dalszej kolejności będziemy analizowali symetrie podanych tu równań.

3. Symetria klasycznego układu równań

Analiza symetrii występujących w równaniach (6) i (7) prowadzi do tożsamości

$$\sigma_{ij} * d\varepsilon'_{ij} - e_{ijklm} * d\eta_{klm} * d\varepsilon'_{ij} \equiv \sigma'_{ij} * d\varepsilon_{ij} \qquad (10)$$

Całkując następnie tożsamość (10) po całej objętości środka i wykorzystując równania ruchu i warunki brzegowe uzyskujemy tożsamość globalną

$$\int_A P_i * du'_i \, dA + \int_V \rho\left(F_i - \ddot{u}_i\right) * du'_i = \int_A P'_i * du_i \, dA + \int_V \rho\left(F'_i - \ddot{u}_i\right) * du_i + \\ + \int_V e_{ijklm} * d\eta_{klm} * d\varepsilon'_{ij} \, dV \tag{11}$$

W równaniu tym układ z „primami" oznacza klasyczne zadania lepkosprężyste, zaś drugie uwzględnia gradient tensora odkształceń.

4. Symetria układu z tensorami naprężeń gradientowych

Badając z kolei symetrię równań fizycznych (8) i (9) otrzymujemy tożsamość

$$\tau_{ijk} * d\eta'_{ijk} - e_{ijklm} * d\varepsilon_{lm} * d\eta'_{ijk} \equiv \tau'_{ijk} * d\eta_{jkl} \tag{12}$$

Całkując tożsamość (12) po objętości ciała i przekształcając otrzymujemy twierdzenie o wzajemności dla tensorów naprężeń gradientowych

$$\int_A \tau_{ijk},_k * du'_i \, n_j \, dA + \int_V \rho\left(F_i - \ddot{u}_i\right) * du'_i \, dV - \int_A \left(\tau_{ijk} * du'_i,_j\right) n_k \, dA = \\ \int_A \tau'_{ijk},_k * du_i n_j \, dA + \int_V \rho\left(F'_i - \ddot{u}'_i\right) * du_i \, dV - \int_A \left(\tau'_{ijk} * du_i,_j\right) n_k \, dA + \\ \int_V e_{ijklm} * d\varepsilon_{lm} * d\eta'_{ijk} \, dV \tag{13}$$

Ostatecznie, po uwzględnieniu zależności między wektorem a tensorem naprężeń gradientowych otrzymujemy końcową postać twierdzenia o wzajemności

$$\int_A \left(\widetilde{P}_i * du'_i - \widetilde{P}'_i * du_i\right) dA + \int_V < \rho\left(F_i - \ddot{u}_i\right) * du'_i - \rho\left(F'_i - \ddot{u}_i\right) * du'_i > dV = \\ \int_A \left(\tau_{ijk} * du'_i,_j\right) n_k - \left(\tau'_{ijk} * du_i,_j\right) n_k \, dA + \int_V e_{ijklmn} * d\varepsilon_{lm} * d\eta'_{ijk} \, dV \tag{14}$$

Gdzie wektory sił powierzchniowych pochodzących od obu typów naprężeń przyjmą postać

$$\left(\tau_{ijk},_k\right) n_j = \widetilde{P}_i, \quad \left(\sigma_{ij} + \tau_{ijk},_k\right) n_j = P_i \tag{15}$$

Podane tu twierdzenie w których układ „z primami" dotyczy zadania uproszczonego, zaś drugi pełnego może być wykorzystany do wyznaczania rozwiązań teorii gradientowych na podstawie znajomości całek teorii uproszczonych wynikających odpowiednio z równań (6) i (8).

Literatura

[1] Alfantis, E. C., Strain gradient interpretation of size effects, Int. J. Fract. 95, 299-314 (1999)
[2] Fleck N.A,Hutchinson,J.W., Strain gradient plasticity, Adv.Appl.Mech. 33, 295-361 (1997)
[3] Kubik, J. Reciprocal theorems of the gradient viscoelasticity with damage, VIII Intenational Conference " New Trends in Statics and Dynamics of Buildings, Bratislava 2009
[4] Kubik, J. Gradientowa Termomechanika, OWPO Opole 2014

SYMMETRIES OF PARTICULAR GRADIENT THEORIES

Summary

The symmetry of particular forms of equations in the theory of gradient viscoelasticity is analysed in the work. Basing on the considerations the reciprocity principle is derived for this case. The principle enables solving boundary problems as for the simplified from of the theory and full one as well.