ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 13/2013
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ZASADA WZAJEMNOŚCI W ELEKTROSTRYKCJI

Jerzy WYRWAŁ
Politechnika Opolska, Opole

1. Wprowadzenie

Budowlane konstrukcje inżynierskie z upływem czasu ulegają uszkodzeniom i starzeniu się, co powoduje obniżenie możliwości realizacji przewidywanych dla nich funkcji użytkowych. Takie niepożądane efekty mogą być spowodowane niekorzystnymi warunkami eksploatacyjnymi (przeciążenie, nagły, dynamiczny wzrost obciążeń), a także niesprzyjającymi warunkami pracy (wilgoć, kwaśne deszcze, zmiany temperatury). Zjawiska te wywołują uszkodzenia lub zmiany struktury wewnętrznej zastosowanych w konstrukcjach materiałów, a w konsekwencji pogorszenie ich właściwości mechanicznych. Inną, poważną przyczyną uszkodzeń konstrukcji budowlanych są wady generowane podczas ich wytwarzania.

Możliwość oceny zmian stanu technicznego konstrukcji i reakcja na powstające w nich zagrożenia może pozwolić na uniknięcie awarii a niekiedy i katastrof budowlanych. Skutecznym sposobem oceny stanu technicznego konstrukcji inżynierskich jest wykorzystanie metod kontroli nieniszczącej, które umożliwiają wykrywanie w nich wewnętrznych, niewidocznych mikropęknięć. Należy jednak podkreślić, że z uwagi na duże wymiary konstrukcji budowlanych, metody kontroli nieniszczącej stosowane zazwyczaj w praktyce (np. badania ultradźwiękowe, magnetyczne, rentgenowskie, wykorzystanie emisji akustycznej lub termografia) mogą być kłopotliwe, a także wymagać niekiedy czasowego wyłączenia badanego obiektu z eksploatacji. Zazwyczaj badania takie mają charakter doraźny lub przypadkowy.

Wad takich pozbawione są metody kontroli nieniszczącej bazujące na specyficznych właściwościach materiałów inteligentnych (smart materials). Metody te stanowią podstawę rozwoju ciągłego monitoringu stanu konstrukcji budowlanych, dostarczającego informacji w czasie rzeczywistym i umożliwiające ich przekazywanie na dowolną odległość.

Do materiałów inteligentnych zaliczają się materiały elektrostrykcyjne, których odkształcenia są proporcjonalne do kwadratu natężenia pola elektrycznego. Są one wykorzystywane do budowy przetworników elektromechanicznych oraz elementów pomiarowych [1], przy czym detektory elektrostrykcyjne charakteryzują się duża czułością [2].

Twierdzenie o wzajemności w przypadku niesprzężonej elektrostrykcji przedstawiono po raz pierwszy w [3]. Symetria równań niesprzężonej elektrostrykcji analizowana była w [4], zaś [5] zawiera wersję przyrostową twierdzenia o wzajemności elektrostrykcji. W [6] sformułowano twierdzenie o wzajemności w przypadku zlinearyzowanych zadań brzegowych termodyfuzji lepkosprężystej w polu elektromagnetycznym. Z kolei rozprawa doktorska [7] zawiera teoretyczne podstawy zastosowania piezopolimerów do diagnostyki konstrukcji inżynierskich; cytowane są w niej i omówione prace polskie i zagraniczne z tego zakresu. W niniejszej pracy sformułowano zasadę wzajemności w przypadku zagadnienia brzegowego elektrostrykcji, w którym jako niewiadome występują trzy składowe wektora przemieszczenia i potencjał elektryczny. W odróżnieniu od wymienionych wyżej prac uwzględniono tu pełne sprzężenie pola mechanicznego z elektrycznym.

2. Zagadnienie brzegowe

Na zagadnienie brzegowe elektrostrykcji składają się:

- równania równowagi

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \tag{1}$$

- równania Gaussa

$$D_{k,k} = \rho_e, \tag{2}$$

- związki geometryczne

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = u_{(i,j)}, \tag{3}$$

- związki między natężeniem pola elektrycznego a jego potencjałem

$$E_k = -\Phi_{,k}. \tag{4}$$

Do powyższych równań należy dołączyć związki konstytutywne. Definiując entalpię elektryczną w postaci [8]

$$H\left(\varepsilon_{ij}, E_i\right) = \tfrac{1}{2} a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \tfrac{1}{2} Q_{ijkl}\varepsilon_{ij} E_k E_l - \tfrac{1}{2} c_{kl} E_k E_l, \tag{5}$$

otrzymujemy nieliniowe, sprzężone równania konstytutywne

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \tfrac{1}{2} Q_{ijkl} E_k E_l, \\ D_k &= -\frac{\partial H}{\partial E_k} = c_{kl} E_l + Q_{ijkl}\varepsilon_{ij} E_l, \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_{ijkl} &= a_{klij} = a_{jikl} = a_{ijlk}, \\ c_{kl} &= c_{lk}, \\ Q_{ijkl} &= Q_{jikl} = Q_{ijlk}, \end{aligned} \tag{7}$$

są współczynnikami materiałowymi, przecinek w dolnym indeksie oznacza pochodną cząstkową, zaś powtarzające się indeksy dolne wskazują na sumowanie.

W powyższych dwudziestu dwóch równaniach jako niewiadome występują następujące funkcje: sześć składowych tensora naprężeń σ_{ij}, sześć składowych tensora odkształceń ε_{ij}, trzy składowe wektora przemieszczenia u_i, trzy składowe wektora indukcji elektrycznej D_k, trzy składowe wektora natężenia pola elektrycznego E_k i potencjał elektryczny Φ. Funkcje te muszą spełniać następujące warunki brzegowe:

$$\begin{gathered} u_i = \hat{u}_i \text{ na } A_u, \\ p_i = \sigma_{ij} n_j = \hat{p}_i \text{ na } A_\sigma, \quad A_u \cup A_\sigma = A, \\ \Phi = \hat{\Phi} \text{ na } A_\Phi, \\ D = D_k n_k = \hat{D} \text{ na } A_D, \quad A_\Phi \cup A_D = A, \end{gathered} \tag{8}$$

gdzie A_α $(\alpha = u, p, \Phi, D)$ są częściami powierzchni ciała, do których są przyłożone zadane: przemieszczenia $\hat{u}_i$, siły powierzchniowe $\hat{p}_i$, potencjał elektryczny $\hat{\Phi}$ i indukcja elektryczna $\hat{D}$.

W celu zmniejszenia liczby niewiadomych eliminujemy z powyższych równań tensory naprężeń σ_{ij} i odkształceń ε_{ij} oraz wektory indukcji elektrycznej D_k i natężenia pola elektrycznego E_k. W rezultacie otrzymujemy układ czterech sprzężonych, nieliniowych równań elektrostrykcji w następującej postaci:

$$\begin{gathered} \left(a_{ijkl} u_{k,l} - \tfrac{1}{2} Q_{ijkl} \Phi_{,k} \Phi_{,l}\right)_{,j} + f_i = 0, \\ -\left(c_{kl} \Phi_{,l} + Q_{ijkl} u_{i,j} \Phi_{,l}\right)_{,k} = \rho_e, \end{gathered} \tag{9}$$

który po przekształceniach można zapisać jako

$$\begin{gathered} a_{ijkl} u_{k,lj} - Q_{ijkl} \Phi_{,k} \Phi_{,lj} + f_i = 0, \\ - c_{kl} \Phi_{,lk} - Q_{ijkl} \left(u_{i,jk} \Phi_{,l} + u_{i,j} \Phi_{,lk}\right) = \rho_e . \end{gathered} \tag{9'}$$

W powyższych równaniach niewiadomymi są trzy składowe wektora przemieszczenia u_i i potencjał elektryczny Φ. Funkcje te muszą spełniać następujące warunki brzegowe:

$$\begin{gathered} u_i = \hat{u}_i \text{ na } A_u, \\ p_i = \left(a_{ijkl} u_{k,l} - \tfrac{1}{2} Q_{ijkl} \Phi_{,k} \Phi_{,l}\right) n_j = \hat{p}_i \text{ na } A_\sigma, \quad A_u \cup A_\sigma = A, \\ \Phi = \hat{\Phi} \text{ na } A_\Phi, \\ D = -\left(c_{kl} \Phi_{,l} + Q_{ijkl} u_{i,j} \Phi_{,l}\right) n_k = \hat{D} \text{ na } A_D, \quad A_\Phi \cup A_D = A. \end{gathered} \tag{10}$$

W celu uproszczenia i skrócenia dalszych rozważań równania (9) oraz warunki brzegowe (10) zapiszemy w zwartej, operatorowej postaci:

$$N(u) + f = 0, \tag{11}$$

gdzie

$$N(u) = \begin{Bmatrix} \left(a_{ijkl}u_{k,l} - \frac{1}{2}Q_{ijkl}\Phi_{,k}\Phi_{,l}\right)_{,j} \\ -\left(c_{kl}\Phi_{,l} + Q_{ijkl}u_{i,j}\Phi_{,l}\right)_{,k} \\ u_i \\ -p_i \\ -\Phi \\ D \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u_i \\ \Phi \\ p_i \\ u_i \\ D \\ \Phi \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} f_i \\ -\rho_e \\ -\hat{u}_i \\ \hat{p}_i \\ \hat{\Phi} \\ -\hat{D} \end{Bmatrix}. \tag{12}$$

przy czym $N(\cdot)$ jest operatorem nieliniowym, u – elementem szukanym, zaś f – danym.

3. Relacja wzajemności

Jeśli na ciało oddziaływać będą dwie niezależne przyczyny f', f'', to wywołają one w nim dwa niezależne skutki u', u'', przy czym

$$\begin{aligned} N(u') + f' &= 0, \\ N(u'') + f'' &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Definiując następujący funkcjonał (formę dwuliniową)

$$\left\langle N(u') + f', u'' \right\rangle = \left\langle N(u'), u'' \right\rangle + \left\langle f', u'' \right\rangle, \tag{14}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \left\langle N(u'), u'' \right\rangle = & \int_V \left(a_{ijkl}u'_{k,l} - \tfrac{1}{2}Q_{ijkl}\Phi'_{,k}\Phi'_{,l}\right)_{,j} u''_i dV - \int_V \left(c_{kl}\Phi''_{,l} + Q_{ijkl}u'_{i,j}\Phi'_{,l}\right)_{,k} \Phi'' dV \\ & + \int_{A_u} u'_i p''_i dA - \int_{A_\sigma} p'_i u''_i dA - \int_{A_\Phi} \Phi' D'' dA + \int_{A_D} D' \Phi'' dA, \\ \left\langle f', u'' \right\rangle = & \int_V \left(f'_i u''_i - \rho'_e \Phi''\right) dV - \int_{A_u} \hat{u}'_i p''_i dA + \int_{A_\sigma} \hat{p}'_i u''_i dA + \int_{A_\Phi} \hat{\Phi}' D'' dA - \int_{A_D} \hat{D}' \Phi'' dA, \end{aligned} \tag{15}$$

możemy napisać, że

$$\begin{aligned} \left\langle N(u'), u'' \right\rangle + \left\langle f', u'' \right\rangle &= 0, \\ \left\langle N(u''), u' \right\rangle + \left\langle f'', u' \right\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Odjęcie powyższych równań stronami prowadzi do relacji

$$\left\langle N\left(u'\right),u''\right\rangle-\left\langle N\left(u''\right),u'\right\rangle=\left\langle f'',u'\right\rangle-\left\langle f',u''\right\rangle, \tag{17}$$

będącej operatorową (symboliczną) postacią zasady wzajemności elektrostrykcji.
Ponieważ z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego wynika, że

$$\begin{aligned}
&\int_V\left(a_{ijkl}u'_{k,l}-\tfrac{1}{2}Q_{ijkl}\Phi'_{,k}\Phi'_{,l}\right)_{,j}u''_i dV-\int_V\left(c_{kl}\Phi'_{,l}+Q_{ijkl}u'_{i,j}\Phi'_{,l}\right)_{,k}\Phi'' dV\\
&=-\int_V\left(a_{ijkl}u'_{k,l}-\tfrac{1}{2}Q_{ijkl}\Phi'_{,k}\Phi'_{,l}\right)u''_{i,j}dV+\int_V\left(c_{kl}\Phi'_{,l}+Q_{ijkl}u'_{i,j}\Phi'_{,l}\right)\Phi''_{,k}dV\\
&\quad+\int_{A_U}p'_iu''_idA+\int_{A_\sigma}p'_iu''_idA-\int_{A_\Phi}D'\Phi''dA-\int_{A_D}D'\Phi''dA,
\end{aligned} \tag{18}$$

zatem, po wykorzystaniu symetrii stałych materiałowych danych związkami (7), możemy sprowadzić lewą stronę relacji (17) do następującej postaci:

$$\left\langle N\left(u''\right),u''\right\rangle-\left\langle N\left(u''\right),u'\right\rangle=\int_V Q_{ijkl}\left[u''_{i,j}\Phi'_{,l}\left(\tfrac{1}{2}\Phi'_{,k}-\Phi''_{,k}\right)-u'_{i,j}\Phi''_{,l}\left(\tfrac{1}{2}\Phi''_{,k}-\Phi'_{,k}\right)\right]dV, \tag{19}$$

z której wynika, że operator $N(\cdot)$ nie jest symetryczny. Z kolei, jak łatwo sprawdzić, prawa strona tej relacji ma postać

$$\begin{aligned}
\left\langle f'',u'\right\rangle-\left\langle f',u''\right\rangle&=\int_V\left(f''_iu'_i-f'_iu''_i\right)dV+\int_V\left(\rho'_e\Phi''-\rho''_e\Phi'\right)dV\\
&+\int_{A_u}\left(\hat{u}'_ip''_i-\hat{u}''_ip'_i\right)dA+\int_{A_\sigma}\left(\hat{p}''_iu'_i-\hat{p}'_iu''_i\right)dA\\
&+\int_{A_\Phi}\left(\hat{\Phi}''D'-\hat{\Phi}'D''\right)dA+\int_{A_D}\left(\hat{D}'\Phi''-\hat{D}''\Phi'\right)dA.
\end{aligned} \tag{20}$$

W konsekwencji (17) przyjmuje ostateczną postać zasady wzajemności elektrostrykcji

$$\begin{aligned}
&\int_V Q_{ijkl}\left[u''_{i,j}\Phi'_{,l}\left(\tfrac{1}{2}\Phi'_{,k}-\Phi''_{,k}\right)-u'_{i,j}\Phi''_{,l}\left(\tfrac{1}{2}\Phi''_{,k}-\Phi'_{,k}\right)\right]dV\\
&=\int_V\left(f''_iu'_i-f'_iu''_i\right)dV+\int_V\left(\rho'_e\Phi''-\rho''_e\Phi'\right)dV\\
&+\int_{A_u}\left(\hat{u}'_ip''_i-\hat{u}''_ip'_i\right)dA+\int_{A_\sigma}\left(\hat{p}''_iu'_i-\hat{p}'_iu''_i\right)dA\\
&+\int_{A_\Phi}\left(\hat{\Phi}''D'-\hat{\Phi}'D''\right)dA+\int_{A_D}\left(\hat{D}'\Phi''-\hat{D}''\Phi'\right)dA
\end{aligned} \tag{21}$$

Otrzymana zasada w postaci (21) może zostać wykorzystana do poszukiwania analitycznych i numerycznych rozwiązań wielu problemów naukowych i inżynierskich związanych z wykorzystaniem materiałów elektrostrykcyjnych.

Oznaczenia symboli

D_k wektor indukcji elektrycznej, electric displacement vector [C/m^2],

E_k wektor natężenia pola elektrycznego, electric field vector [V/m],

f_i wektor siły objętościowej, mechanical body force [N/m^3],

u_i wektor przemieszczenia, elastic displacement vector [m],

ε_{ij} tensor odkształceń, symmetric strain tensor [-],

Φ potencjał elektryczny, electric potential [V],

σ_{ij} tensor naprężeń, symmetric stress tensor [Pa],

ρ_e gęstość ładunku elektrycznego, electric charge [C/m^3].

Literatura

[1] Makarewicz G.: Materiały inteligentne – zastosowanie w systemach aktywnej redukcji hałasu i drgań, Bezpieczeństwo pracy, 12, 2005, 15÷19.

[2] Surowiał S., Skulski R, Dudek J.: Właściwości przetworników elektromechanicznych na bazie ceramiki elektrostrykcyjnej, Materiały XLIV Otwartego Seminarium z Akustyki, Gdańsk-Jastrzębia Góra, 1997, 429÷434.

[3] Knops R. J., A reciprocal theorem for a first order theory of electrostriction, ZAMP – Journal of Applied Mathematics and Physics, 14, 2, 1963, 148÷155.

[4] Kubik J., Rzepka J., Symmetry of equations of the electrostriction effect, Proc. 4th International Conference on New Trends in Static and Dynamic of Buildings, Bratislava, 2005.

[5] Kubik J., Rzepka J., Incremental formulation of reciprocal theorem for electrostriction effect, Proc. 7th International Conference on New Trends in Static and Dynamic of Buildings, Bratislava, 2009.

[6] Kubik J., Jędrzejczyk-Kubik J., Reciprocal theorem for viscoelastic thermodiffusion in the electromagnetic field, ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 70, 4, 1990, s. 262÷264.

[7] Rzepka J., Teoretyczne podstawy zastosowania piezopolimerów do diagnostyki konstrukcji inżynierskich (rozprawa doktorska), Opole 2009.

[8] Tang Y., Ballarini R., A theoretical analysis of the breakdown of electrostrictive oxide film on metal, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 59, 2011, 178÷193.

RECIPROCITY PRINCIPLE OF ELECTROSTRICTION

Summary

The paper contains derivation of reciprocity principle for boundary problem of electrostriction. The results obtained in this work can become the theoretical basis to formulate the numerical solutions of different scientific and engineering problems connected with electrostrictive materials.