ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 13/2013
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

WIĘZY TERMOMECHANICZNE W TEORII GRADIENTOWEJ

Jan KUBIK
Politechnika Opolska

1. Więzy termomechaniczne

Więzy mechaniczne związane np. z opisem nieściśliwości materiałów prowadzą do dodatkowych równań typu $\gamma_{ij}\, d_{ij} = 0$ ograniczających odkształcenia ε_{ij} i ich prędkości d_{ij} w ośrodku, przy czym tensor γ_{ij} należy wyznaczyć z dodatkowych równań. Podobnie wprowadza się więzy na przepływy ciepła i masy w ośrodku co prowadzi do równań:

$$\gamma_{ij}\, d_{ij} + \gamma_i\, \theta_{,i} + \sum_{\alpha} \left(\Xi^{\alpha} M^{\alpha} + Q_i^{\alpha} M_{,i}^{\alpha} \right) = 0 \tag{1}$$

Następnie postuluje się, iż podstawowe pola w procesie termomechanicznym: entropia S, naprężenia σ_{ij}, stężenia c^{α} i strumienie ciepła q_i i masy j_i są addytywnymi sumami wpływu więzów (1) oraz procesu termomechanicznego bez więzów

$$\begin{aligned} &S = \tilde{S} + \bar{S}, \quad \sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}, \quad c^{\alpha} = \tilde{c}^{\alpha} + \bar{c}^{\alpha}, \\ &j_i^{\alpha} = \tilde{j}_i^{\alpha} + \bar{j}_i^{\alpha}, \quad q_i = \tilde{q}_i + \bar{q}_i \end{aligned} \tag{2}$$

W szczególności zaś możemy przyjąć, iż zachodzi

$$\bar{\sigma}_{ij} = \tau_{ijk,k}, \qquad \bar{j}_i^{\alpha} = J_{ij,j}^{\alpha}, \qquad \bar{q}_i = Q_{ij,j} \tag{3}$$

W ten sposób człony gradientowe tensora naprężeń i strumienia masy oraz ciepła zostaną potraktowane jako wpływy więzów w teorii sprzężonej. Otrzymujemy tu jakościowo odmienne ujęcie termodyfuzji gradientowej od klasycznego

2. Termomechanika ośrodków z więzami

Podstawiając rozkłady pól $s, \sigma_{ij,} c^{\alpha}, j_i^{\alpha}, q_i$ w części klasyczne i pochodzące od więzów (2) do nierówności rezydualnej por.[2,3,4]

$$-\rho K-\rho S\dot{\theta}+\sigma_{ij}d_{ij}-\sum_{\alpha}\left(\rho c^{\alpha}\dot{M}^{\alpha}+j_i^{\alpha}M_{,i}^{\alpha}\right)-\frac{q_i\theta_{,i}}{T}\geq 0 \tag{4}$$

stwierdzamy, że zgodnie z klasycznym postępowaniem dla składników $\tilde{s},\tilde{\sigma}_{ij},\tilde{c}^{\alpha},\tilde{j}_i^{\alpha},\tilde{q}_i$ spełniona zostaje nierówność (4). Otrzymamy też równania konstytutywne procesu $s,\sigma_{ij,}c^{\alpha},j_i^{\alpha},q_i$. Z pozostałych zaś składników uzyskamy nierówność

$$-\rho\bar{s}\dot{\theta}+\bar{\sigma}_{ij}d_{ij}-\sum_{\alpha}\bar{c}^{\alpha}M^{\alpha}-\sum_{\alpha}\bar{j}_i^{\alpha}M_{,i}^{\alpha}-\bar{q}_i\theta_{,i}\frac{1}{T}\geq 0 \tag{5}$$

Do tej nierówności wprowadzimy też *równanie więzów termomechanicznych* (1). Istotnie, zgodnie z procedurą wprowadzania mnożników Lagrange'a λ będzie zachodzić

$$\begin{aligned}&-\rho s\dot{\theta}+\left(\bar{\sigma}_{ij}-\lambda\gamma_{ij}\right)d_{ij}-\sum_{\alpha}\left(\bar{c}^{\alpha}+\lambda\Xi^{\alpha}\right)\dot{M}^{\alpha}-\left(\frac{\bar{q}_i}{T}+\lambda\gamma_i\right)\theta_{,i}\\&-\sum_{\alpha}\left(\bar{j}_i^{\alpha}+\lambda Q_i^{\alpha}\right)M_{,i}^{\alpha}\geq 0\end{aligned} \tag{6}$$

Otrzymamy w tym przypadku następujący układ równań na reakcję więzów

$$\bar{\sigma}_{ij}=\lambda\gamma_{ij},\qquad \bar{c}^{\alpha}=-\lambda\varepsilon^{\alpha},\qquad \bar{q}_i=\lambda T\gamma_i,\qquad \bar{j}_i^{\alpha}=\lambda Q_i^{\alpha} \tag{7}$$

Dodatkowo zaś z równości $\rho\bar{s}\dot{\theta}=0$ wynika, iż dla $\dot{\theta}\neq 0$ zachodzi $\bar{s}=0$. Oznacza to, że więzy nie powodują wzrostu entropii.

3. Więzy w gradientowej termomechanice

Rozpatrzmy obecnie własności nierówności rezydualnej w przypadku termodyfuzji gradientowej por.[3]

$$\begin{aligned}&-\rho\dot{A}-\rho\dot{S}\Theta+\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}-\tau_{ijk}\dot{u}_{i,jk}-q_i\frac{\Theta_{,j}}{T}+\\&+\sum_{\alpha}\left(\rho\dot{c}_{\alpha}M^{\alpha}-\rho R^{\alpha}M^{\alpha}-j_i^{\alpha}M_{,j}^{\alpha}\right)\geq 0\end{aligned} \tag{8}$$

Wprowadzając jak poprzednio potencjał ρK

$$\rho K=\rho U-\rho\left(S\Theta+\sum_{\alpha}c^{\alpha}M^{\alpha}\right) \tag{9}$$

otrzymamy nową nierówność rezydualną

$$\rho\dot{K} = \rho S\dot{\Theta} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \tau_{ijk}\dot{\eta}_{ijk} - \sum_{\alpha}\left(\rho c^{\alpha}\dot{M}^{\alpha} + j_i^{\alpha}M_{,j}^{\alpha} + \rho R^{\alpha}M^{\alpha}\right) + \\ -\frac{q_i\Theta_{,i}}{T} \geq 0 \tag{10}$$

Potencjał termodynamiczny $\rho\widetilde{K}\left(\Theta, \varepsilon_{ij}, \eta_{ijk}, M^{\alpha}\right)$ stąd

$$\dot{K} = \frac{\partial K}{\partial\Theta}\dot{\Theta} + \frac{\partial K}{\partial\varepsilon_{ij}}\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial K}{\partial\eta_{ijk}}\dot{\eta}_{ijk} + \frac{\partial K}{\partial M^{\alpha}}\dot{M}^{\alpha} \tag{11}$$

Podstawiając wyrażenie na $\rho\dot{K}$ do nierówności rezydualnej otrzymamy

$$\rho\left(S + \frac{\partial K}{\partial\Theta}\right)\dot{\Theta} + \left(\sigma_{ij} - \rho\frac{\partial K}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} + \left(-\tau_{ijk} - \rho\frac{\partial K}{\partial\eta_{ijk}}\right)\dot{\eta}_{ijk} + \\ -\sum_{\alpha}\left(c^{\alpha} - \frac{\partial K}{\partial M^{\alpha}}\right)\dot{M}^{\alpha} - \sum_{\alpha}\rho R^{\alpha}M^{\alpha} - \sum j_i^{\alpha}M_{,j}^{\alpha} - \frac{q_i\Theta_{,i}}{T} \geq 0 \tag{12}$$

Jeżeli podana nierówność ma być spełniona dla każdego wyboru funkcji $\Theta, \varepsilon_{ij}\eta_{ijk}M^{\alpha}$ to powinno zachodzić [2,3]

$$S = -\frac{\partial K}{\partial\Theta},\ \sigma_{ij} = \rho\frac{\partial K}{\partial\varepsilon_{ij}},\ \tau_{ij} = -\rho\frac{\partial K}{\partial\eta_{ijk}},\ c^{\alpha} = -\frac{\partial K}{\partial M^{\alpha}} \tag{13}$$

$$\left(j_i^{\alpha} + J_{i,jj}^{\alpha}\right)M_{,i}^{\alpha} \geq 0 \text{ stąd } j_i^{\alpha} + J_{i,jj}^{\alpha} = -D_{ij}^{\alpha}M_{,j}^{\alpha} \text{ oraz } q_i + Q_{i,jj} = \lambda_{ij}\Theta_{,j}$$

Jest to klasyczne połączenie w termodynamice.
Wprowadźmy teraz więzy postaci

$$\gamma_{ij}d_{ij} - \pi_{ijk}\eta_{ijk} + \Theta_{ij,j}\Theta_{,j} + \sum_{\alpha}\left(\Xi^{\alpha}M^{\alpha} + J_{ij,j}^{\alpha}M_{,j}^{\alpha}\right) = 0 \tag{14}$$

Następnie postuluje się, iż podstawowe pola procesu na entropię S, naprężenia σ_{ij}, τ_{ijk}, stężenia C^{α} oraz strumienie ciepła Θ i masy j_i^{α} są addytywnymi funkcjami wpływu więzów oraz pól wyliczonych poprzednio. Zachodzi

$$S = \widetilde{S} + \overline{S},\ \sigma_{ij} = \widetilde{\sigma}_{ij} + \overline{\sigma}_{ij},\ \tau_{ijk} = \widetilde{\tau}_{ijk} + \overline{\tau}_{ijk}, \\ c^{\alpha} = \widetilde{c}^{\alpha} + \overline{c}^{\alpha},\ j_i^{\alpha} = \widetilde{j}_i^{\alpha} + \overline{j}_i^{\alpha},\ q_i = \widetilde{q}_i + \overline{q}_i \tag{15}$$

Zakładamy dalej, iż pola $\left(\widetilde{X}\right)$ z równania (15) będą spełniały nierówność rezydualną (10) tak jak zmienne w równaniach (11). Dodatkowo pola $\left(\overline{X}\right)$ wynikające z reakcji na więzy spełniają nierówność

$$-\rho\overline{S}\dot{\Theta} + \overline{\sigma}_{ij}d_{ij} - \overline{\tau}_{ij}\dot{\eta}_{ijk} - \sum_{\alpha}\overline{j}_i^{\alpha}M_{,i}^{\alpha} - q_i\Theta_{,i}\frac{1}{T} \geq 0 \tag{16}$$

Jeżeli do tej nierówności wprowadzimy równanie na więzy (14) uwzględniając zgodnie z procedurą korzystania z mnożników Lagrange'a zależności podobnie jak w (6)

$$\begin{aligned} &-\rho\bar{S}\dot{\Theta}+\left(\bar{\sigma}_{ij}-\lambda\gamma_{ij}\right)d_{ij}-\left(\bar{\tau}_{ij}+\lambda\pi_{ij,k}\right)\dot{\eta}_{ijk}-\left(q_i+\lambda Q_{ij,j}\right)\Theta_{,i}\frac{1}{T} \\ &-\sum_{\alpha}\left[\left(\bar{c}^{\alpha}+\lambda\Xi^{\alpha}\right)M^{\alpha}\right]-\left(\bar{j}_i^{\alpha}+\lambda J_{ij,j}^{\alpha}\right)M_{,i}^{\alpha}\geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

otrzymamy w wyniku następujący układ równań jako reakcje na więzy

$$\bar{\sigma}_{ij}=\lambda\gamma_{ij},\ \bar{\tau}_{ijk}=\lambda\pi_{ijk},\ \bar{c}^{\alpha}=-\lambda\Xi^{\alpha},\ \bar{q}_i=\lambda Q_{ij,j},\ \bar{j}_i^{\alpha}=\lambda J_{ij,j}^{\alpha} \tag{18}$$

Z nierówności pozostaje $-\rho\bar{S}\dot{\Theta}\geq 0$, co przy założeniu, że w realnym procesie $\dot{\Theta}\neq 0$ prowadzi do stwierdzenia, iż reakcja na więzy nie prowadzi do zmian entropii.

Literatura

[1] Atkin R.J.,Craine R.E Continuum theories of mixtures. Appplications J.Mech.Appl.Math. 17, !976, 153-207
[2] Green A.E, Naghdi P.M, Trapp A. Thermomechanics of a continuum with internal constrains, Int.J.Engng Sci 8, 1976.
[3] Kubik J. Termomechanika gradientowa OW PO. Opole 2014-05-23
[4] Woźniak Cz. Więzy w mechanice ciał odkształcalnych, Ossolineum, Wrocław 1988

THERMOMECHANICAL CONSTRAINTS IN THE GRADIENT THEORY

Summary

The theory of thermomechanical constraints is used in the work in order to derive particular forms of equations for the theory of gradient thermodiffusion. The constraints are considered for the material medium in which the gradient components of the equations do not cause additional energy dissipation.