ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 14/2014
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ZASADA WZAJEMNOŚCI W MAGNETOSTRYKCJI

Jerzy WYRWAŁ, Marcin HABERECHT
Politechnika Opolska, Opole, Polska

1. Wprowadzenie

Magnetostrykcja jest zjawiskiem polegającym na powstawaniu odkształceń pod wpływem pola magnetycznego. Zjawisko magnetostrykcji po raz pierwszy odkrył w 1842 roku JOULE. Natura zjawiska magnetostrykcji leży w zmianie wymiarów liniowych materiału pod wpływem zmiany namagnesowania, zaś jej źródłem jest magnetyczne sprzężenie momentu spinowego i orbitalnego elektronów.

Zjawiskiem odwrotnym do magnetostrykcji jest efekt VILLARIEGO, zwany też magnetomechanicznym. Polega on na zmianie namagnesowania pod wpływem jednoosiowego naprężenia i obejmuje przemianę energii mechanicznej odkształcenia w energię magnetyczną.

Materiały magnetostrykcyjne należą do grupy materiałów inteligentnych (smart materials), które przekształcając energię magnetyczną w energię odkształcenia sprężystego i odwrotnie, wykorzystywane są głównie jako aktuatory i sensory, np. w sonarach, tomografii geologicznej, zaworach hydraulicznych, pompach hydraulicznych, lustrach o zmiennej geometrii, przemysłowym myciu ultradźwiękowym. W zakresie budownictwa mogą być one wykorzystywane w czujnikach sejsmicznych oraz sensorach ruchu, siły i pola magnetycznego, a także do monitorowania stanu elementów z materiałów kompozytowych, służąc tym samym do oceny trwałości i stopnia zużycia materiałów i konstrukcji.

Przegląd literatury dotyczącej magnetostrykcji oraz zjawisk pochodnych, a także omówienie tradycyjnych materiałów magnetostrykcyjnych, materiałów o gigantycznej magnetostrykcji oraz materiałów hybrydowych, łączących cechy materiałów magnetostrykcyjnych oraz materiałów z magnetyczną pamięcią kształtu można znaleźć w [2].

Oprócz wykorzystania praktycznego zjawiska magnetostrykcji należy też zwrócić uwagę na jego aspekt naukowy, gdyż teoria magnetostrykcji jest stosunkowo nową dziedziną mechaniki, rozwijającą się na styku teorii ciała odkształcalnego i magnetyzmu. Analiza sprzężonych pól mechanicznych i magnetycznych w materiałach magnetostrykcyjnych wymaga rozwiązania układu sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych mechaniki i magnetostatyki ośrodków ciągłych. Ponieważ zjawisko magnetostrykcji jest nieliniowe fizycznie i występuje w nim pełne sprzężenie pola mechanicznego z magnetycznym, to trudno jest znaleźć dokładne rozwiązanie formułowanych zagadnień o znaczeniu praktycznym. Ułatwić to może wykorzystanie pewnych właściwości operatora zagadnienia brzegowego magnetostrykcji, które można wykorzystać do poszukiwania przybliżonych rozwiązań numerycznych przy wykorzystaniu np. metody elementów brzegowych.

W niniejszej pracy sformułowano zagadnienie brzegowe magnetostrykcji, w którym jako niewiadome występują trzy składowe wektora przemieszczenia i potencjał magnetyczny oraz uwzględniono pełne sprzężenie pola mechanicznego z magnetycznym. Następnie zadanie to sprowadzono do postaci operatorowej oraz wyprowadzono relację wzajemności.

2. Zagadnienie brzegowe

Na zagadnienie brzegowe magnetostrykcji składają się:

- równania równowagi

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \tag{1}$$

- równanie Gaussa

$$B_{k,k} = 0, \tag{2}$$

- związki geometryczne

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = u_{(i,j)}, \tag{3}$$

- związki między natężeniem pola magnetycznego a jego potencjałem

$$H_k = -\varphi_{,k}. \tag{4}$$

W powyższych równaniach przecinek w dolnym indeksie oznacza pochodną cząstkową po zmiennej przestrzennej x_j, zaś powtarzające się indeksy dolne wskazują na sumowanie.

Do powyższych równań należy dołączyć związki konstytutywne. Definiując entalpię magnetyczną w postaci

$$E\left(\varepsilon_{ij}, H_i\right) = \tfrac{1}{2} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - F_{kij}\varepsilon_{ij}H_k - \tfrac{1}{2} M_{ijkl}\varepsilon_{ij}H_k H_l - \tfrac{1}{2} A_{kl}H_k H_l, \tag{5}$$

gdzie współczynniki (tensory) materiałowe C_{ijkl}, F_{ikl}, M_{ijkl} oraz A_{kl} cechują się następującymi symetriami

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}, \quad F_{kij} = F_{kji}, \quad A_{kl} = A_{lk}, \quad M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{ijlk}, \tag{6}$$

otrzymujemy nieliniowe, sprzężone równania konstytutywne [3]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - F_{kij}H_k - \tfrac{1}{2} M_{ijkl} H_k H_l ,$$
$$B_k = -\frac{\partial E}{\partial H_k} = A_{kl} H_l + F_{kij}\varepsilon_{ij} + M_{ijkl}\varepsilon_{ij} H_l . \tag{7}$$

Powyższe równania ujmują dwa efekty magnetomechaniczne: piezomagnetyczny (liniowy) i magnetostrykcyjny (nieliniowy), zaś występujące w nich współczynniki materiałowe F_{ikl} (piezomagnetyczny) oraz M_{ijkl} (magnetostrykcyjny) sprzęgają pole mechaniczne z magnetycznym (tensory sprzężenia magnetosprężystego).

Należy zaznaczyć, że efekt piezomagnetyczny nie występuje w materiałach cechujących się gigantyczną magnetostrykcją. W takim przypadku $F_{ikl} = 0$ i równania (7) przyjmują postać analogiczną do równań elektrostrykcji [1,4]. Z kolei, w przypadku pominięcia w równaniach (7) efektu nieliniowego, $M_{ijkl} = 0$, otrzymujemy równania liniowe, analogiczne do równań piezoelektryczności.

W dwudziestu dwóch równaniach (1)-(4) i (7) jako niewiadome występują następujące funkcje: sześć składowych tensora naprężeń σ_{ij}, sześć składowych tensora odkształceń ε_{ij}, trzy składowe wektora przemieszczenia u_i, trzy składowe wektora indukcji magnetycznej B_k, trzy składowe wektora natężenia pola magnetycznego H_k i potencjał magnetyczny φ. Funkcje te muszą spełniać następujące warunki brzegowe:

$$u_i = \hat{u}_i \text{ na } A_u, \quad p_i = \sigma_{ij} n_j = \hat{p}_i \text{ na } A_\sigma, \quad A_u \cup A_\sigma = A,$$
$$\varphi = \hat{\varphi} \text{ na } A_\varphi, \quad B = B_k n_k = \hat{B} \text{ na } A_B, \quad A_\varphi \cup A_B = A, \tag{8}$$

gdzie A_α $(\alpha = u, \sigma, \varphi, B)$ są częściami powierzchni ciała, do których przyłożono odpowiednio zadane: przemieszczenia $\hat{u}_i$, siły powierzchniowe $\hat{p}_i$, potencjał magnetyczny $\hat{\varphi}$ i indukcję magnetyczną $\hat{B}$; zaś n_j oznacza wektor normalny do brzegu ciała.

W celu zmniejszenia liczby niewiadomych eliminujemy z powyższych równań tensory naprężeń σ_{ij} i odkształceń ε_{ij}, a także wektory indukcji magnetycznej B_k i natężenia pola magnetycznego H_k. W rezultacie otrzymujemy układ czterech sprzężonych, nieliniowych równań magnetostrykcji w następującej postaci:

$$\left(C_{ijkl}u_{k,l} - F_{kij}\varphi_{,k} - \tfrac{1}{2} M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi_{,l}\right)_{,j} + f_i = 0,$$
$$-\left(A_{kl}\varphi_{,l} + F_{kij}u_{i,j} + M_{ijkl}u_{i,j}\varphi_{,l}\right)_{,k} = 0, \tag{9}$$

który po przekształceniach można zapisać jako

$$C_{ijkl}u_{k,lj} - F_{kij}\varphi_{,kj} - M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi_{,lj} + f_i = 0,$$
$$-A_{kl}\varphi_{,lk} - F_{kij}u_{i,jk} - M_{ijkl}\left(u_{i,jk}\varphi_{,l} + u_{i,j}\varphi_{,lk}\right) = 0. \tag{9'}$$

W powyższych równaniach niewiadomymi są trzy składowe wektora przemieszczenia u_i i potencjał magnetyczny φ. Funkcje te muszą spełniać następujące warunki brzegowe:

$$
\begin{aligned}
&u_i = \hat{u}_i \text{ na } A_u, \quad p_i = \left(C_{ijkl} u_{k,l} - F_{kij} \varphi_{,k} - \tfrac{1}{2} M_{ijkl} \varphi_{,k} \varphi_{,l} \right) n_j = \hat{p}_i \text{ na } A_\sigma, \quad A_u \cup A_\sigma = A, \\
&\varphi = \hat{\varphi} \text{ na } A_\varphi, \quad B = -\left(A_{kl} \varphi_{,l} + F_{kij} u_{i,j} + M_{ijkl} u_{i,j} \varphi_{,l} \right) n_k = \hat{B} \text{ na } A_B, \quad A_\varphi \cup A_B = A.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

W celu uproszczenia i skrócenia dalszych rozważań i analiz zapiszemy równania (9) oraz warunki brzegowe (10) w następującej, zwartej operatorowej postaci

$$
N(u) + f = 0, \tag{11}
$$

gdzie

$$
N(u) = \begin{Bmatrix} \left(C_{ijkl} u_{k,l} - F_{kij} \varphi_{,k} - \tfrac{1}{2} M_{ijkl} \varphi_{,k} \varphi_{,l} \right)_{,j} \\ -\left(A_{kl} \varphi_{,l} + F_{kij} u_{i,j} + M_{ijkl} u_{i,j} \varphi_{,l} \right)_{,k} \\ u_i \\ -p_i \\ -\varphi \\ B \end{Bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u_i \\ \varphi \\ p_i \\ u_i \\ B \\ \varphi \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} f_i \\ 0 \\ -\hat{u}_i \\ \hat{p}_i \\ \hat{\varphi} \\ -\hat{B} \end{Bmatrix}, \tag{12}
$$

przy czym $N(\cdot)$ oznacza operator nieliniowy, u – element szukany, zaś f – element dany.

3. Relacja wzajemności

Jeśli na rozpatrywane ciało magnetosprężyste oddziaływać będą dwa niezależne od siebie układy przyczyn f', f'', to wywołają one w nim dwa niezależne od siebie układy skutków u', u'', przy czym zarówno f', u' jak i f'', u'' muszą spełniać operatorowe równanie zagadnienia (11), czyli

$$
\begin{aligned}
N(u') + f' = 0, \\
N(u'') + f'' = 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Zdefiniujmy teraz następujący funkcjonał dwuliniowy

$$
\left\langle N(u') + f', u'' \right\rangle = \left\langle N(u'), u'' \right\rangle + \left\langle f', u'' \right\rangle, \tag{14}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\left\langle N(u'), u'' \right\rangle &= \int_V \left(C_{ijkl} u'_{k,l} - F_{kij} \varphi'_{,k} - \tfrac{1}{2} M_{ijkl} \varphi'_{,k} \varphi'_{,l} \right)_{,j} u''_i dV \\
&- \int_V \left(A_{kl} \varphi'_{,l} + F_{kij} u'_{i,j} + M_{ijkl} u'_{i,j} \varphi'_{,l} \right)_{,k} \varphi'' dV \\
&+ \int_{A_u} u'_i p''_i dA - \int_{A_\sigma} p'_i u''_i dA - \int_{A_\varphi} \varphi' B'' dA + \int_{A_B} B' \varphi'' dA, \\
\left\langle f', u'' \right\rangle = \int_V f'_i u''_i dV &- \int_{A_u} \hat{u}'_i p''_i dA + \int_{A_\sigma} \hat{p}'_i u''_i dA + \int_{A\varphi} \hat{\varphi}' B'' dA - \int_{A_B} \hat{B}' \varphi'' dA.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

W takim przypadku możemy układ równań operatorowych (13) zapisać w następującej, alternatywnej postaci

$$
\begin{aligned}
&\left\langle N(u'),u''\right\rangle + \left\langle f',u''\right\rangle = 0,\\
&\left\langle N(u''),u'\right\rangle + \left\langle f'',u'\right\rangle = 0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Odjęcie powyższych równań stronami prowadzi do relacji

$$
\left\langle N(u'),u''\right\rangle - \left\langle N(u''),u'\right\rangle = \left\langle f'',u'\right\rangle - \left\langle f',u''\right\rangle,
\tag{17}
$$

będącej operatorową (symboliczną) postacią zasady wzajemności magnetostrykcji.

Z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego wynika, że

$$
\begin{aligned}
&\int_V \left(C_{ijkl}u'_{k,l} - F_{kij}\varphi'_{,k} - \tfrac{1}{2}M_{ijkl}\varphi'_{,k}\varphi'_{,l}\right)_{,j} u''_i dV\\
&-\int_V \left(A_{kl}\varphi'_{,l} + F_{kij}u'_{i,j} + M_{ijkl}u'_{i,j}\varphi'_{,l}\right)_{,k} \varphi'' dV\\
&= -\int_V \left(C_{ijkl}u'_{k,l} - F_{kij}\varphi'_{,k} - \tfrac{1}{2}M_{ijkl}\varphi'_{,k}\varphi'_{,l}\right) u''_{i,j} dV\\
&+\int_V \left(A_{kl}\varphi'_{,l} + F_{kij}u'_{i,j} + M_{ijkl}u'_{i,j}\varphi'_{,l}\right) \varphi''_{,k} dV\\
&+\int_{A_u} p'_i u''_i dA + \int_{A_\sigma} p'_i u''_i dA - \int_{A_\varphi} B'\varphi'' dA - \int_{A_B} B'\varphi'' dA.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Powyższa zależność, po wykorzystaniu symetrii stałych materiałowych danych związkami (6), pozwala przedstawić lewą stronę relacji (17) w następującej postaci:

$$
\left\langle N(u'),u''\right\rangle - \left\langle N(u''),u'\right\rangle = \int_V M_{ijkl}\left[u''_{i,j}\varphi'_{,l}\left(\tfrac{1}{2}\varphi'_{,k} - \varphi''_{,k}\right) - u'_{i,j}\varphi''_{,l}\left(\tfrac{1}{2}\varphi''_{,k} - \varphi'_{,k}\right)\right] dV,
\tag{19}
$$

z której wynika, że operator $N(\cdot)$ nie jest symetryczny, gdyż prawa strona zależności (19) jest różna od zera. Z kolei, jak łatwo sprawdzić, prawa strona relacji (17) ma postać

$$
\begin{aligned}
&\left\langle f'',u'\right\rangle - \left\langle f',u''\right\rangle = \int_V \left(f''_i u'_i - f'_i u''_i\right) dV +\\
&+\int_{A_u} \left(\hat{u}'_i p''_i - \hat{u}''_i p'_i\right) dA + \int_{A_\sigma} \left(\hat{p}''_i u'_i - \hat{p}'_i u''_i\right) dA\\
&+\int_{A_\varphi} \left(\hat{\varphi}'' B' - \hat{\varphi}' B''\right) dA + \int_{A_B} \left(\hat{B}'\varphi'' - \hat{B}''\varphi'\right) dA.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Podstawienie zależności (19) i (20) do relacji (17) pozwala ją zapisać w następującej, jawnej postaci zasady wzajemności magnetostrykcji

$$
\begin{aligned}
&\int_V M_{ijkl}\left[u''_{i,j}\varphi'_{,l}\left(\tfrac{1}{2}\varphi'_{,k}-\varphi''_{,k}\right)-u'_{i,j}\varphi''_{,l}\left(\tfrac{1}{2}\varphi''_{,k}-\varphi'_{,k}\right)\right]dV \\
&=\int_V\left(f''_i u'_i-f'_i u''_i\right)dV+\int_{A_u}\left(\hat{u}'_i p''_i-\hat{u}''_i p'_i\right)dA+\int_{A_\sigma}\left(\hat{p}''_i u'_i-\hat{p}'_i u''_i\right)dA \\
&+\int_{A_\varphi}\left(\hat{\varphi}''B'-\hat{\varphi}'B''\right)dA+\int_{A_B}\left(\hat{B}'\varphi''-\hat{B}''\varphi'\right)dA
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Otrzymana zasada w postaci (21) może pozwolić na poszukiwanie analitycznych i numerycznych rozwiązań zagadnień naukowych i inżynierskich związanych z zastosowaniem materiałów magnetostrykcyjnych.

Oznaczenia symboli

B_k - wektor indukcji magnetycznej, magnetic induction vector, [T],

H_k - wektor natężenia pola magnetycznego, magnetic field strength vector, [A/m],

f_i - wektor siły objętościowej, mechanical body force, [N/m^3],

u_i - wektor przemieszczenia, elastic displacement vector, [m],

ε_{ij} - tensor odkształceń, symmetric strain tensor, [-],

φ - potencjał magnetyczny, magnetic potential, [A],

σ_{ij} - tensor naprężeń, symmetric stress tensor, [Pa].

Literatura

[1] Feng X., Fang D., Soh A. K., Hwang, K. C., Predicting effective magnetostriction and moduli of magnetostrictive composites by using the double inclusion method, Mechanics of Materials, 35, 2003, p. 623-631.

[2] Leonowicz M., Materiały magnetostrykcyjne, Inżynieria Materiałowa, 25, 2, 2004, s. 68-69.

[3] Nan C.W., Weng G.J., Influence of microstructural features on the effective magnetostriction of composite materials, Physical Review B, 1999, 60, p. 6723-6730.

[4] Wyrwał J., Zasada wzajemności elektrostrykcji, Roczniki Inżynierii Budowlanej, 13, 2013, s. 57-62.

RECIPROCITY PRINCIPLE OF MAGNETOSTRICTION

Summary

The paper contains derivation of reciprocity principle for boundary problem of magnetostriction. The results obtained in this work can become the theoretical basis to formulate the numerical solutions of different scientific and engineering problems connected with magnetostrictive materials.