ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 14/2014
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

TWIERDZENIE WARIACYJNE GRADIENTOWEJ TERMODYFUZJI LEPKOSPRĘŻYSTEJ

Jan KUBIK
Politechnika Opolska, Opole, Polska

1. Równania fizyczne procesu

Przedstawimy najprostszą postać twierdzenia wariacyjnego gradientowej termomechaniki. Analizujemy wówczas układ równań fizycznych wynikający z potencjału termodynamicznego $\rho K = \rho K\left(\varepsilon_{ij}, \eta_{ijk}, \Theta, M^{\alpha}\right)$, który z energią wewnętrzną łączy relacja

$$\rho K = \rho U - \rho\Theta S - \sum_{\alpha} M^{\alpha} c^{\alpha} \tag{1}$$

Równania konstytutywne na naprężenie σ_{ij}, τ_{ijk}, entropię ρS, stężenia c^{α} i strumienie q_i, j_i^{α} przypisane funkcjonałowi K przyjmują postać (por. [6])

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} + e_{ijklm} * d\eta_{klm} - c_{ij}^{T} * d\Theta - \sum_{\alpha} d_{ij}^{\alpha} * dM^{\alpha} \tag{2}$$

$$\tau_{ijk} = e_{ijklm} * d\varepsilon_{lm} + G_{ijklmn} * d\eta_{lmn} - c_{ijk}^{T} * d\Theta - \sum_{\alpha} c_{ijk}^{\alpha} * dM^{\alpha} \tag{3}$$

$$-\rho S = -c_{ij}^{T} * \varepsilon_{ij} - c_{ijk}^{T} * d\eta_{ijk} + c_{v} * d\Theta + \sum_{\alpha} f^{\alpha} * dM^{\alpha} \tag{4}$$

$$-c^{\alpha} = -d_{ij}^{\alpha} * d\varepsilon_{ij} - d_{ijk}^{\alpha} * d\eta_{ijk} + f^{\alpha} * d\Theta + b^{\alpha} * dM^{\alpha} \tag{5}$$

$$q_i = -\lambda_{ij}\Theta_{,j} \quad , \quad j_j^{\alpha} = -D_{ij}^{\alpha} M_{,j}^{\alpha} \tag{6}$$

Pola występujące w powyższych równaniach są funkcjami położenia i czasu.

2. Zadanie brzegowe

Podstawiając równania fizyczne do lokalnych równań bilansów masy, pędu i energii otrzymamy układ równań problemu (por. [6]):

- równania mechaniczne

$$
\begin{gathered}
(E_{ijkl} * du_{k,l} + e_{iklm} * du_{k,lm} + e_{ijlmk} * du_{k,ml} + G_{ijlkmn} * du_{k,mnl})_{,j} \\
-(c_{ij}^{T} * d\Theta + \sum_{\alpha} d_{ij}^{\alpha} * dM^{\alpha} + c_{ijk}^{T} * d\Theta_{,k} + \sum_{\alpha} d_{ijk}^{\alpha} * dM_{,k}^{\alpha})_{,j} = -\rho F_{i}
\end{gathered} \tag{7}
$$

- równanie cieplne

$$
\rho T_{0} d\left(c_{kj}^{T} * du_{k,j} + c_{kji}^{T} * du_{k,ji} + c_{v} * d\Theta + \sum_{\alpha} f^{\alpha} * dM^{\alpha} \right) + S(0) = \rho r - q_{i,i} \tag{8}
$$

- równanie dyfuzyjne

$$
\rho d\left(d_{kj}^{\alpha} * du_{k,j} + d_{kji}^{\alpha} * du_{k,ji} + f^{\alpha} * d\Theta + b^{\alpha} * dM^{\alpha} \right) + c^{\alpha}(0) = \rho R^{\alpha} - j_{i,i}^{\alpha} \tag{9}
$$

Otrzymaliśmy układ 5 równań problemu opisującego mechaniczny, cieplny i dyfuzyjny aspekt zagadnienia. W każdym z tych równań występują oddziaływania od pozostałych pól. Do powyższych zależności należy dołączyć następujące warunki brzegowe (por. [6])

$$
(\sigma_{ij} + \tau_{ijk,k}) n_{j} = \hat{p}_{i} \quad \text{na} \quad A_{\sigma} \tag{10}
$$

$$
\begin{gathered}
[E_{ijkl} * du_{k,l} + e_{ijklm} * du_{k,lm} + e_{ijlkm} * du_{k,lm} + G_{ijlkmn} * du_{k,mnl} \\
-(c_{ij}^{T} * d\Theta + \sum_{\alpha} d_{ij}^{\alpha} * dM^{\alpha} + c_{ijk}^{T} * d\Theta_{,k} + \sum_{\alpha} d_{ijk}^{\alpha} * dM_{,k}^{\alpha})] n_{j} = \hat{p}_{i}
\end{gathered} \quad \text{na} \quad A_{\sigma} \tag{10'}
$$

$$
u_{i} = \hat{u}_{i} \quad \text{na} \quad A_{u} \tag{10''}
$$

$$
q = -\lambda_{ij} \Theta_{,j} n_{i} = \hat{q} \quad \text{na} \quad A_{q} \tag{11}
$$

$$
\Theta = \hat{\Theta} \quad \text{na} \quad A_{T} \tag{11'}
$$

$$
j = -D_{ij}^{\alpha} M_{,j}^{\alpha} n_{i} = \hat{j} \quad \text{na} \quad A_{j} \tag{12}
$$

$$
M = \hat{M} \quad \text{na} \quad A_{M} \tag{12'}
$$

Warunki początkowe odnoszą się do pól przemieszczeń u_i, entropii S i stężeń c^{α}

$$
\rho u_{i}(0_{+}) = \overset{\circ}{u}_{i}, \quad \rho \dot{u}_{i}(0_{+}) = \overset{\circ}{v}_{i}, \quad S(0_{+}) = \overset{\circ}{S}, \quad c^{\alpha}(0_{+}) = \overset{\circ}{c}{}^{\alpha} \tag{13}
$$

W równaniach tych symbolami u_i, ε_{ij}, η_{ijk}, P_i, σ_{ij}, τ_{ijk}, ρF_i, S, Θ, ρr, q_i, c^{α}, M^{α}, j_i^{α}, ρR^{α}, λ_{ij}, D_{ij}^{α}, E_{ijkl}, $...(\ )*d(\ ), \overset{\circ}{u}_i$, $(\overset{\circ}{\ })$, $\overset{\circ}{S}$, $\overset{\circ}{c}$, $\hat{p}_i$, $\hat{v}_i$, $\hat{q}_i$, $\hat{\Theta}$, $\hat{j}_i$, $\hat{M}$ oznaczono kolejno: przemieszczenie, odkształcenie, wektor i tensory naprężenia, siłę masową i powierzchniową, entropię, temperaturę, źródła i strumienie ciepła, udział masowy, potencjał chemiczny oraz strumień i źródło masy, funkcje materiałowe, splot Stjeltiesa oraz funkcje zadane w chwili początkowej i na brzegu ciała.

Obszary brzegu spełniają warunki

$$A = A_\sigma \cup A_u = A_q \cup A_\Theta = \bigcup_\alpha (A_{j^\alpha} \cup A_{c^\alpha}), \quad A_\sigma \cap A_u = A_q \cap A_\Theta = A_{j^\alpha} \cap A_{c^\alpha} = \phi \quad (14)$$

3. Operatorowe ujęcie problemu

Podany układ równań z warunkami początkowo-brzegowymi można zapisać operatorowo (por.[2,4,5]) w postaci ogólnego równania operatorowego (15) postaci

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \ \mathbf{x} \in \mathbf{E}, \ \mathbf{b} \in \hat{\mathbf{E}} \quad (15)$$

gdzie **A** jest macierzą operatorów. Wektory **x** i **b** w naszej interpretacji mają następujące składowe

$$\mathbf{x} = \left[u_k, \Theta, M^\alpha; u_k, p_k, \Theta, q_k, M^\alpha, j_k^\alpha; u_k S, \Theta, c^\alpha, M^\alpha\right]^T \quad (16)$$

$$\mathbf{b} = \left[\rho F_i, -\rho r, -\rho R^\alpha; \hat{p}_i, \hat{u}_i - \hat{q}_i, \hat{\Theta}, -\hat{j}_i^\alpha, \hat{M}^\alpha - \rho \overset{\circ}{v}_i, -\rho O, \overset{\circ}{S}, O\overset{\circ}{c}\right]^T$$

Natomiast składowe macierzy operatorów A_{ij} wynikają z równań (7)-(9) oraz (10)-(13). Macierz $A_{ij} = A_{ji}$ jest symetryczna, a przypisany jej funkcjonał $F(\mathbf{x})$ przyjmuje formę

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} < \mathbf{Ax}, \mathbf{x} > + < \mathbf{b}, \mathbf{x} > \quad (17)$$

gdzie $< \bullet \ , \bullet >$ oznacza dwuliniową formę na $E \times \hat{E}$

4. Funkcjonał gradientowej termodyfuzji lepkosprężystej

Po przekształceniach funkcjonał (17) w gradientowej termomechanice przyjmuje formę

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) = \int_V \Big\langle & \tfrac{1}{2} E_{ijkl} * du_{k,l} * du_{i,j} + e_{ijklm} * du_{k,lm} * du_{i,j} + e_{ijklm} * du_{l,m} * du_{i,jk} \\ & + \frac{1}{2} G_{ijklmn} * du_{l,mn} * du_{i,jk} \\ & - [c_{ij}^T * d\Theta * du_{i,j} + c_{ijk}^T * d\Theta_{,k} * du_{i,j} + \sum_\alpha \left(d_{ij}^\alpha * dM^\alpha * du_{i,j} + d_{ijk}^\alpha * dM_{,k}^\alpha * du_{i,j}\right) \\ & - \frac{1}{2} \rho T_0 c_v * d\Theta * d\Theta - \frac{1}{2} \sum_\alpha b^\alpha * dM^\alpha * dM^\alpha + \sum_\alpha f^\alpha * d\Theta * dM^\alpha \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_{ij}\Theta_{,j}*\Theta_{,i}-\frac{1}{2}\sum_{\alpha}D_{ij}^{\alpha}M_{,j}^{\alpha}*M_{,i}^{\alpha}-\rho F_i*du_i+\rho r*\Theta+\sum_{\alpha}\rho R^{\alpha}*M^{\alpha}\Big\rangle dV$$

$$+\int_V\left(\frac{1}{2}\rho u_i*du_i-\rho\overset{\circ}{v}_i\,du_i-\rho\overset{\circ}{u}_i\,du_i+\rho\overset{\circ}{S}\,\Theta+\sum_{\alpha}\rho\overset{\circ}{c}{}^{\alpha}M^{\alpha}\right)dV \qquad (18)$$

$$-\int_{A_\sigma}\hat{p}_i*du_i dA-\int_{A_u}(u_i-\hat{u}_i)*dp_i dA-\int_{A_q}\hat{q}_i*\Theta n_i dA-\int_{A_\Theta}\left(\Theta-\hat{\Theta}\right)*q_i n_i dA$$

$$-\sum_{\alpha}\int_{A_j^{\alpha}}\hat{j}_i^{\alpha}*M^{\alpha}n_i dA+\sum_{\alpha}\int_{A_M^{\alpha}}\left(M^{\alpha}-\hat{M}^{\alpha}\right)*j_i^{\alpha}n_i dA$$

Podany funkcjonał zawiera składniki wynikające kolejno z zadań mechanicznych, następnie cieplnych i dyfuzyjnych. Ostatnie składniki dotyczą warunków brzegowych i początkowych.

Przypisane funkcjonałowi (18) równania Eulera-Lagrange'a są równaniami (7)-(13) opisującymi zadanie początkowo-brzegowe gradientowej termodyfuzji w ciele stałym

5. Literatura

[1] Biot M., Variational principles in heat trasfer, Oxford University.
[2] Michlin S.G., Variacionnyje metody w matematićeskoj fizyke, Nauka Moskwa 1970.
[3] Tatarkiewicz K., Rachunek wariacyjny T 1 i 2, WNT W-wa 1970.
[4] Vajnberg M. M., Methods for the study of non-linear operators, San Francisco, Holden Day 1964.
[5] Tonti E., Variational principles in elastostatics, Meccanica 2, 4, 1967.
[6] Kubik J. Termomechanika gradientowa OWPO Opole (w druku).

VARIATIONAL THEOREM FOR VISCOELASTIC GRADIENT THERMODIFFUSION

Summary

The variational theorem is derived for the boundary problems of gradient thermomechanics. Heat and mass flows coupled with a mechanical problem are analysed in the work within a framework of the gradient theory.