ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 14/2014
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ZASADA WARIACYJNA MAGNETOSTRYKCJI

Jerzy WYRWAŁ, Marcin HABERECHT
Politechnika Opolska, Opole, Polska

1. Wprowadzenie

Zjawisko magnetostrykcji jest samoistną właściwością materiału magnetycznego, polegającą na zmianie liniowych wymiarów materiałów w efekcie zmiany jego namagnesowania. Materiały magnetostrykcyjne pozwalają na przekształcanie energii magnetycznej w mechaniczną (działanie typu aktuator) oraz mechanicznej w magnetyczną (działanie typu sensor). Podstawowe informacje na temat materiałów magnetostrykcyjnych i ich zastosowań w technice, wraz z przeglądem literatury, zawiera [3].

Zjawisko magnetostrykcji jako pierwszy zaobserwował Joule w 1842 roku w przypadku żelaza. Efekt magnetostrykcyjny (względny przyrost długości próbki materiału) wykazują też nikiel, kobalt oraz ich stopy, i jest on rzędu $50 \cdot 10^{-6}$. Stosowane obecnie w przetwornikach magnetostrykcyjnych materiały o gigantycznej magnetostrykcji wykazują odkształcenia dochodzące do $3000 \cdot 10^{-6}$ [1].

Materiały magnetostrykcyjne znalazły zastosowanie w sonarach, tomografii geologicznej, czujnikach sejsmicznych, czujnikach ruchu, siły statycznej, ciśnienia i pola magnetycznego, w zaworach hydraulicznych układów wtrysku paliwa, w pompach hydraulicznych, w lustrach o zmiennej geometrii, w urządzeniach do odgazowania przy wulkanizacji gumy i w przemysłowym myciu ultradźwiękowym.

Teoria magnetostrykcji jest dziedziną mechaniki rozwijającą się na styku teorii ciała odkształcalnego i magnetyzmu, zaś samo zjawisko magnetostrykcji jest nieliniowe fizycznie i opisuje je układ sprzężonych równań różniczkowych, których rozwiązanie jest bardzo trudne. Znalezienie rozwiązań formułowanych zagadnień brzegowych może ułatwić wariacyjne ujęcie magnetostrykcji, które pozwala na ich poszukiwanie w drodze minimalizacji odpowiedniego funkcjonału wariacyjnego. Wykorzystanie przy tym przybliżonych metod analitycznych (np. metody RITZA) lub numerycznych (np. MES) może pozwolić na znalezienie rozwiązań w przypadku wielu problemów naukowych i inżynierskich związanych z wykorzystaniem materiałów magnetostrykcyjnych.

Niniejsza praca poświęcona jest sformułowaniu zasady wariacyjnej magnetostrykcji. Wykorzystano w tym celu twierdzenie VAINBERGA [4], z którego wynikają warunki i postać funkcjonału wariacyjnego magnetostrykcji.

2. Zagadnienie brzegowe

Jak wykazano w [5], równania opisujące zjawisko magnetostrykcji można sprowadzić do następującego układu sprzężonych, nieliniowych równań tensorowych:

$$
\begin{aligned}
&\left(C_{ijkl}u_{k,l} - F_{kij}\varphi_{,k} - \tfrac{1}{2}M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi_{,l}\right)_{,j} + f_i = 0,\\
&-\left(A_{kl}\varphi_{,l} + F_{kij}u_{i,j} + M_{ijkl}u_{i,j}\varphi_{,l}\right)_{,k} = 0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

który można też zapisać jako

$$
\begin{aligned}
&C_{ijkl}u_{k,lj} - F_{kij}\varphi_{,kj} - M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi_{,lj} + f_i = 0,\\
&-A_{kl}\varphi_{,lk} - F_{kij}u_{i,jk} - M_{ijkl}\left(u_{i,jk}\varphi_{,l} + u_{i,j}\varphi_{,lk}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1'}
$$

W powyższych równaniach przecinek w dolnym indeksie oznacza pochodną cząstkową po zmiennej przestrzennej x_j, natomiast powtarzające się indeksy dolne wskazują na sumowanie. W powyższych równaniach występują współczynniki materiałowe $A_{kl}, F_{kij}, C_{ijkl}, M_{ijkl}$, które charakteryzują się następującymi symetriami:

$$
C_{ijkl}=C_{klij}=C_{jikl}=C_{ijlk}, \quad F_{kij} = F_{kji}, \quad A_{kl}=A_{lk}, \quad M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{ijlk}. \tag{2}
$$

W celu sformułowania zadania brzegowego magnetostrykcji, do powyższych równań dołączymy warunki brzegowe w następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
&u_i = \hat{u}_i \text{ na } A_u, \quad \left(C_{ijkl}u_{k,l} - F_{kij}\varphi_{,k} - \tfrac{1}{2}M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi_{,l}\right)n_j - \hat{p}_i = 0 \text{ na } A_\sigma, \quad A_u \cup A_\sigma = A,\\
&\varphi = \hat{\varphi} \text{ na } A_\varphi, \quad \left(A_{kl}\varphi_{,l} + F_{kij}u_{i,j} + M_{ijkl}u_{i,j}\varphi_{,l}\right)n_k + \hat{B} = 0 \text{ na } A_B, \quad A_\varphi \cup A_B = A.
\end{aligned} \tag{3}
$$

W powyższych warunkach symbolem A_α $(\alpha = u, p, \varphi, B)$ oznaczono części powierzchni ciała, do których są przyłożone odpowiednio zadane: przemieszczenia $\hat{u}_i$, siły powierzchniowe $\hat{p}_i$, potencjał magnetyczny $\hat{\varphi}$ i indukcja magnetyczna $\hat{B}$.

Równania (1) wraz z warunkami brzegowymi (3) tworzą zagadnienie brzegowe, w którym niewiadomymi są trzy składowe wektora przemieszczenia u_i i potencjał magnetyczny φ.

3. Zasada wariacyjna

Dalsze rozważania można skrócić i przedstawić w bardziej zwartej postaci, jeżeli zapiszemy równania (1) oraz warunki brzegowe (3_2) i (3_4) w następującej, operatorowej formie:

$$
N(u) + f = 0, \tag{4}
$$

gdzie $N(\cdot)$ oznacza operator nieliniowy, u element szukany, zaś f dany, przy czym operatory te zdefiniowane są jako:

$$N(u)=\begin{Bmatrix} -C_{ijkl}u_{k,lj}+F_{kij}\varphi_{,kj}+\frac{1}{2}M_{ijkl}(\varphi_{,k}\varphi_{,l})_{,j} \\ A_{kl}\varphi_{,lk}+F_{kij}u_{i,jk}+M_{ijkl}(u_{i,j}\varphi_{,l})_{,k} \\ (C_{ijkl}u_{k,l}-F_{kij}\varphi_{,k}-\frac{1}{2}M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi_{,l})n_j \\ -(A_{kl}\varphi_{,l}+F_{kij}u_{i,j}+M_{ijkl}u_{i,j}\varphi_{,l})n_k \end{Bmatrix},\quad u=\begin{Bmatrix} u_i \\ \varphi \\ u_i \\ \varphi \end{Bmatrix},\quad f=\begin{Bmatrix} -f_i \\ 0 \\ -\hat{p}_i \\ \hat{B} \end{Bmatrix}. \tag{5}$$

Warunki istnienia funkcjonału wariacyjnego $F(u_i,\varphi)$, z którego, jako równanie EULERA-LAGRANGE'A, otrzymujemy nieliniowe równanie operatorowe (4), a także postać tego funkcjonału określa twierdzenie VAINBERGA [4]. Z twierdzenia tego wynika, że funkcjonał taki istnieje w przypadku potencjalności operatora rozpatrywanego zadania brzegowego (4). Problem wyznaczenia postaci takiego funkcjonału należy do zagadnień odwrotnych rachunku wariacyjnego [2].

Aby wykazać, że operator $N(\cdot)$ jest potencjalny sprowadzimy zagadnienie brzegowe (4) do następującej, ekwiwalentnej postaci:

$$\langle N(u)+f,u\rangle=\langle N(u),u\rangle+\langle f,u\rangle=0, \tag{6}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\langle N(u),u\rangle&=\int_V\left[-C_{ijkl}u_{k,lj}+F_{kij}\varphi_{,kj}+\tfrac{1}{2}M_{ijkl}(\varphi_{,k}\varphi_{,l})_{,j}\right]u_i dV\\&+\int_V\left[A_{kl}\varphi_{,lk}+F_{kij}u_{i,jk}+M_{ijkl}(u_{i,j}\varphi_{,l})_{,k}\right]\varphi dV\\&+\int_{A_\sigma}\left(C_{ijkl}u_{k,l}-F_{kij}\varphi_{,k}-\tfrac{1}{2}M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi_{,l}\right)n_j u_i dA\\&-\int_{A_B}\left(A_{kl}\varphi_{,l}+F_{kij}u_{i,j}+M_{ijkl}u_{i,j}\varphi_{,l}\right)n_k\varphi dA,\\\langle f,u\rangle&=-\int_V f_i u_i dV-\int_{A_\sigma}\hat{p}_i u_i dA+\int_{A_B}\hat{B}\varphi dA.\end{aligned} \tag{7}$$

Wykorzystując twierdzenie GAUSSA-OSTROGRADSKIEGO

$$\begin{aligned}&\int_V\left(-C_{ijkl}u_{k,l}+F_{kij}\varphi_{,k}+\tfrac{1}{2}M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi_{,l}\right)_{,j}u_i dV+\int_V\left[A_{kl}\varphi_{,l}+F_{kij}u_{i,j}+M_{ijkl}(u_{i,j}\varphi_{,l})\right]_{,k}\varphi dV\\&=\int_V\left(C_{ijkl}u_{k,l}-F_{kij}\varphi_{,k}-\tfrac{1}{2}M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi_{,l}\right)u_{i,j}dV-\int_V\left[A_{kl}\varphi_{,l}+F_{kij}u_{i,j}+M_{ijkl}(u_{i,j}\varphi_{,l})\right]\varphi_{,k}dV\\&+\int_{A_\sigma}\left(-C_{ijkl}u_{k,l}+F_{kij}\varphi_{,k}+\tfrac{1}{2}M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi_{,l}\right)n_j u_i dA+\int_{A_B}\left[A_{kl}\varphi_{,l}+F_{kij}u_{i,j}+M_{ijkl}(u_{i,j}\varphi_{,l})\right]n_k\varphi dA,\end{aligned} \tag{8}$$

otrzymujemy, że:

$$
\begin{aligned}
\langle N(u),u\rangle &= \int_V \left(C_{ijkl}u_{k,l} - F_{kij}\varphi_{,k} - \tfrac{1}{2}M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi_{,l}\right)u_{i,j}dV \\
&- \int_V \left[A_{kl}\varphi_{,l} + F_{kij}u_{i,j} + M_{ijkl}(u_{i,j}\varphi_{,l})\right]\varphi_{,k}dV.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Zgodnie z twierdzeniem VAINBERGA operator $N(\cdot)$ jest potencjalny, gdy spełniony jest warunek symetrii [4]

$$
\langle dN(u,u'),u''\rangle = \langle dN(u,u''),u'\rangle,
\tag{10}
$$

gdzie $dN(u,u')$ oznacza różniczkę GATEAUX operatora $N(\cdot)$. W dalszych rozważaniach założymy, że składowe elementów u' oraz u'' spełniają na brzegu obszaru następujące warunki:

$$
\begin{aligned}
u_i+\alpha u_i' = u_i+\alpha u_i'' = \hat{u}_i \rightarrow u_i' = u_i'' = 0 \text{ na } A_u, \\
\varphi+\alpha\varphi' = \varphi+\alpha\varphi'' = \hat{\varphi} \rightarrow \varphi' = \varphi'' = 0 \text{ na } A_\varphi.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Warunek (10) jest wystarczający, aby istniał funkcjonał wariacyjny $F(u)$, którego gradientem (różniczką GATEAUX) będzie operator $N(u)+f$.

Jak łatwo sprawdzić, różniczka GATEAUX ma w rozważanym przypadku postać

$$
dN(u,u') = \frac{d}{d\alpha}N(u+\alpha u')\Big|_{\alpha=0} = \left\{
\begin{array}{c}
-C_{ijkl}u'_{k,lj} + F_{kij}\varphi'_{,kj} + \tfrac{1}{2}M_{ijkl}(\varphi_{,k}\varphi'_{,l})_{,j} \\
A_{kl}\varphi'_{,lk} + F_{kij}u'_{i,jk} + M_{ijkl}\left(u'_{i,j}\varphi_{,l} + u_{i,j}\varphi'_{,l}\right)_{,k} \\
\left(C_{ijkl}u'_{k,l} - F_{kij}\varphi'_{,k} - \tfrac{1}{2}M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi'_{,l}\right)n_j \\
-\left[A_{kl}\varphi'_{,l} + F_{kij}u'_{i,j} + M_{ijkl}\left(u'_{i,j}\varphi_{,l} + u_{i,j}\varphi'_{,l}\right)\right]n_k
\end{array}
\right\}.
\tag{12}
$$

Podstawiając do zależności (7_1) operator $dN(u,u')$ w miejsce operatora $N(u)$ oraz element u'' w miejsce elementu u otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\langle dN(u,u'),u''\rangle &= \int_V (-C_{ijkl}u'_{k,l} + F_{kij}\varphi'_{,k} + \tfrac{1}{2}M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi'_{,l})_{,j}u''_i dV \\
&+ \int_V (A_{kl}\varphi'_{,l} + F_{kij}u'_{i,j} + M_{ijkl}(u'_{i,j}\varphi_{,l} + u_{i,j}\varphi'_{,l})_{,k}\varphi'' dV \\
&+ \int_{A_\sigma} \left(C_{ijkl}u'_{k,l} - F_{kij}\varphi'_{,k} - \tfrac{1}{2}M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi'_{,l}\right)n_j u''_i dA \\
&- \int_{A_B} \left(A_{kl}\varphi''_{,l} + F_{kij}u'_{i,j} + M_{ijkl}(u'_{i,j}\varphi_{,l} + u_{i,j}\varphi'_{,l})\right)n_k\varphi'' dA.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Wykorzystując ponownie twierdzenie GAUSSA-OSTROGRADSKIEGO oraz warunki brzegowe (11) sprowadzamy relację (13) do następującej postaci:

$$\left\langle dN(u,u'),u''\right\rangle =$$
$$\int_V \left[C_{ijkl}u'_{k,l}u''_{i,j} - F_{kij}(\varphi'_{,k}u''_{i,j} + \varphi''_{,k}u'_{i,j}) - \left(A_{kl} + M_{ijkl}u_{i,j}\right)\varphi'_{,k}\varphi''_{,l} - M_{ijkl}\varphi_{,k}\left(u''_{i,j}\varphi'_{,l} + u'_{i,j}\varphi''_{,l}\right)\right]dV, \tag{14}$$

z której wynika, że warunek symetrii (10) jest spełniony a więc operator $N(\cdot)$ jest potencjalny. Zatem, zgodnie z twierdzeniem VAINBERGA, możemy wyznaczyć poszukiwany funkcjonał wariacyjny ze wzoru

$$F(u) = \int_0^1 \left\langle N(\alpha u),u\right\rangle d\alpha + \left\langle f,u\right\rangle, \tag{15}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\langle N(\alpha u),u\right\rangle d\alpha &= \int_V \left[-\tfrac{1}{2}C_{ijkl}u_{k,lj} + \tfrac{1}{2}F_{kij}\varphi_{,kj} + \tfrac{1}{6}M_{ijkl}\left(\varphi_{,k}\varphi_{,l}\right)_{,j}\right]u_i dV \\
&+ \int_V \left[\tfrac{1}{2}A_{kl}\varphi_{,lk} + \tfrac{1}{2}F_{kij}u_{i,jk} + \tfrac{1}{3}M_{ijkl}\left(u_{i,j}\varphi_{,l}\right)_{,k}\right]\varphi dV \\
&+ \int_{A_\sigma} \left(\tfrac{1}{2}C_{ijkl}u_{k,l} - \tfrac{1}{2}F_{kij}\varphi_{,k} - \tfrac{1}{6}M_{ijkl}\varphi_{,k}\varphi_{,l}\right)n_j u_i dA \\
&- \int_{A_B} \left(\tfrac{1}{2}A_{kl}\varphi_{,l} + \tfrac{1}{2}F_{kij}u_{i,j} + \tfrac{1}{3}Q_{ijkl}u_{i,j}\varphi_{,l}\right)n_k\varphi dA,
\end{aligned} \tag{16}$$

zaś $\left\langle f,u\right\rangle$ zdefiniowany jest relacją (7_2). Po wykorzystaniu kolejny raz twierdzenia GAUSSA-OSTROGRADSKIEGO oraz dalszych, prostych przekształceniach dostajemy

$$\int_0^1 \left\langle N(\alpha u),u\right\rangle d\alpha = \int_V \left(\tfrac{1}{2}C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} - F_{kij}\varphi_{,k}u_{i,j} - \tfrac{1}{2}A_{kl}\varphi_{,k}\varphi_{,l} - \tfrac{1}{2}M_{ijkl}u_{i,j}\varphi_{,k}\varphi_{,l}\right)dV \tag{17}$$

i w konsekwencji funkcjonał wariacyjny (15) w ostatecznej postaci

$$F(u_i,\varphi) = \int_V E(u_i,\varphi)dV - \int_V f_i u_i dV - \int_{A_\sigma} \hat{p}_i u_i dA + \int_{A_B} \hat{B}\varphi dA, \tag{18}$$

gdzie (co warto podkreślić)

$$E(u_i,\varphi) = \tfrac{1}{2}C_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l} - F_{kij}\varphi_{,k}u_{i,j} - \tfrac{1}{2}A_{kl}\varphi_{,k}\varphi_{,l} - \tfrac{1}{2}M_{ijkl}u_{i,j}\varphi_{,k}\varphi_{,l} \tag{19}$$

jest entalpią magnetyczną [5] wyrażoną w przemieszczeniach u_i i potencjale magnetycznym φ.

Jak łatwo sprawdzić z warunku stacjonarności funkcjonału (18), czyli zerowania się jego wariacji

$$\delta F(u_i,\varphi) = 0, \tag{20}$$

otrzymujemy równanie operatorowe (4), a w konsekwencji równania EULERA-LAGRANGE'A w postaci równań (1) oraz warunków brzegowych (3_2) i (3_4), a tym samym zagadnienie brzegowe magnetostrykcji. Zależność (20) wyraża treść zasady wariacyjnej magnetostrykcji.

Jak już wspomniano we wstępie, otrzymana zasada wariacyjna może ułatwić poszukiwanie przybliżonych postaci poszukiwanych funkcji w przypadku złożonych zagadnień brzegowych magnetostrykcji.

Oznaczenia symboli

B_k − wektor indukcji magnetycznej, magnetic induction vector [T],

H_k − wektor natężenia pola magnetycznego, magnetic field strength vector [A/m],

f_i − wektor siły objętościowej, mechanical body force [N/m^3],

u_i − wektor przemieszczenia, elastic displacement vector [m],

ε_{ij} − tensor odkształceń, symmetric strain tensor [-],

φ − potencjał magnetyczny, magnetic potential [A],

σ_{ij} − tensor naprężeń, symmetric stress tensor [Pa].

Literatura

[1] Engdahl G., Handbook of giant magnetostrictive materials, Academic Press, San Diego, 2000.

[2] Głazunov J., Metody wariacyjne, Oficyna Wydawnicza Impuls, Kraków 2005

[3] Leonowicz M., Materiały magnetostrykcyjne, Inżynieria Materiałowa, 25, 2, 2004, s. 68-69.

[4] Vainberg M. M., Potential operators and the variational theory of nonlinear operator equations, Uspekhi Mat. Nauk, 10, 1955, 223–227.

[5] Wyrwał J., Zasada wzajemności w magnetostrykcji, Roczniki Inżynierii Budowlanej, 14, 2014, s. 15-20.

VARIATIONAL PRINCIPLE OF MAGNETOSTRICTION

Summary

The paper shows how to transform a given nonlinear boundary problem of magnetostriction into a variational formulation. A sufficient condition for the construction of variational principle is formulated in the theorem of VAINBERG. The results obtained in this work can become the theoretical basis to formulate the numerical solutions of different scientific and engineering problems connected with magnetostrictive materials.