ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 15/2015
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

ANALIZA NIERÓWNOŚCI REZYDUALNEJ GRADIENTOWEJ TERMOMECHANIKI

Jan KUBIK
Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Opolska, Opole, Polska

Słowa kluczowe: *termomechanika gradientowa, nierówność rezydualna.*

1. Wstęp

Ogólne właściwości gradientowej termomechaniki wynikają z analizy zasad termodynamiki, której finalnym efektem jest *nierówność rezydualna.* Nierówność rezydualna stanowi esencję zasad zachowania masy, pędu, energii i nierówności wzrostu entropii w procesach termodynamicznych. Stąd też ważna jest jej analiza. W szczególności, analiza przyrostów niezależnych pól fizycznych procesu pozwala na ocenę stabilności procesu termomechanicznego.

2. Nierówność rezydualna mieszaniny gradientowej

Wyjściowym punktem rozważań jest nierówność rezydualna, przedstawiona w przypadku mieszaniny składników, ujmująca ograniczenia na zmiany energii wewnętrznej u i niezależnych pól procesu termomechanicznego (ρs, d_{ij}, $\dot{\eta}_{ijk}$, $T_{,i}$, c^{α}, R^{α}, $M^{\alpha}_{,i}$) [6]:

$$\begin{aligned} &-\rho\frac{du}{dt}+\rho\frac{ds}{dt}T+\sigma_{ij}d_{ij}+\tau_{ijk}\frac{d\eta_{ijk}}{dt}-\left(q_i-Q_{ij,j}\right)T_{,i}\frac{1}{T}+ \\ &+\sum_{\alpha}\left[\rho\frac{dc^{\alpha}}{dt}M^{\alpha}-\rho R^{\alpha}M^{\alpha}-\left(j_i^{\alpha}-I_{ij,j}^{\alpha}\right)M_{,i}^{\alpha}\right]\geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Z nierówności tej wynikają nie tylko równania konstytutywne procesu, ale także właściwości układu zmierzającego do stanów równowagowych. Załóżmy w tym celu, że w (1) zachodzi:

$$\frac{ds}{dt}\to 0,\ d_{ij}\to 0,\ \frac{d\eta_{ijk}}{dt}\to 0,\ T_{,i}\to 0,\ \frac{dc^{\alpha}}{dt}\to 0,\ M_{,i}^{\alpha}\to 0,\ R^{\alpha}\to 0. \tag{2}$$

Wówczas z nierówności (1) wynika, że

$$-\rho\frac{du}{dt} \geq 0\,, \tag{3}$$

co oznacza, że energia wewnętrzna układu maleje, a w stanie równowagowym jest stała.

Nierówność rezydualna może również służyć do wyznaczania warunków stabilności układu. Należy w tym celu badać wariacje zmiennych pól w procesie, czyli:

$$\delta u\,,\ \delta s\,,\ \delta d_{ij}\,,\ \delta\eta_{ijk}\,,\ \delta c^{\alpha}\,,\ \delta T_{,i}\,,\ \delta M^{\alpha}_{,i}\,,\ \delta R^{\alpha}\,. \tag{4}$$

Wyznaczenie wariacji wyszczególnionych pól uzyskuje się z nierówności rezydualnej, gdzie pola te doznały przyrostów $\delta(\ldots)$. Zachodzi wtedy:

$$\begin{aligned}
&-\rho\frac{d}{dt}\left(u+\alpha\,\delta u\right)+\rho\frac{d}{dt}\left(s+\alpha\,\delta s\right)T+\\
&+\sigma_{ij}\left(d_{ij}+\alpha\,\delta d_{ij}\right)-\tau_{ijk}\frac{d}{dt}\left(\eta_{ijk}+\alpha\,\delta\eta_{ijk}\right)-\left(q_i-Q_{ij,j}\right)\frac{1}{T}\left(T_{,i}+\alpha\,\delta T_{,i}\right)+\\
&+\sum_{\alpha}\Bigg[\rho\frac{d}{dt}\left(c^{\alpha}+\alpha\,\delta c^{\alpha}\right)M^{\alpha}-\rho\left(R^{\alpha}+\alpha\,\delta R^{\alpha}\right)M^{\alpha}-\\
&-\left(j_i^{\alpha}-I^{\alpha}_{ij,j}\right)\left(M^{\alpha}_{,i}+\alpha\,\delta M^{\alpha}_{,i}\right)\Bigg]\geq 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Wariacje $\delta(\ldots)$ wyznacza się z granicy pochodnej $\lim_{\alpha\to 0}(d(\ldots)/d\alpha)$ (np. [1-5]). Wobec tego wariacja nierówności (1) będzie mieć postać:

$$\begin{aligned}
&-\rho\,\delta\left(\frac{du}{dt}\right)+\rho\,\delta\left(\frac{ds}{dt}\right)T+\sigma_{ij}\,\delta d_{ij}-\tau_{ijk}\,\delta\left(\frac{d\eta_{ijk}}{dt}\right)-\left(q_i-Q_{ij,j}\right)\frac{1}{T}\,\delta T_{,i}+\\
&+\sum_{\alpha}\left[\rho\,\delta\left(\frac{dc^{\alpha}}{dt}\right)M^{\alpha}-\rho\,\delta R^{\alpha}M^{\alpha}-\left(j_i^{\alpha}-I^{\alpha}_{ij,j}\right)\delta M^{\alpha}_{,i}\right]\geq 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Otrzymaliśmy tutaj ważny wynik termomechaniki gradientowej, pozwalający na określenie warunków stabilności procesu narastania odkształceń, entropii, gradientów ciepła i masy w procesie termomechanicznym. W powyższych równaniach symbolami: d_{ij}, η_{ijk}, σ_{ij}, τ_{ijk}, q_i, $Q_{ij,j}$, S, T, ρ, c^{α}, M^{α}, R^{α}, j_i^{α}, $I^{\alpha}_{ij,j}$ oznaczono kolejno: składowe tensorów prędkości odkształceń, gradientów odkształceń, naprężeń, naprężeń gradientowych, składowe wektorów gęstości strumienia ciepła (w opisie klasycznym i w opisie uwzględniającym wpływ gradientów niezależnych pól na przebieg procesu), entropię, temperaturę, gęstość materiału oraz w przypadku składnika α jego stężenie masowe, potencjał chemiczny, źródło masy i składowe gęstości strumienia masy (w opisie klasycznym i w opisie uwzględniającym wpływ gradientów niezależnych pól na proces).

Przeanalizujmy jeszcze analogiczne warunki określające stany równowagowe oraz stabilności procesu opisanego przez energię swobodną $\rho A=\rho u-\rho sT$. Nierówność rezydualna przyjmuje wtedy postać

$$
\begin{aligned}
&-\rho\frac{dA}{dt}-\rho s\frac{dT}{dt}+\sigma_{ij}d_{ij}-\tau_{ijk}\frac{d\eta_{ijk}}{dt}-\left(q_i-Q_{ij,j}\right)T_{,i}\frac{1}{T}+\\
&+\sum_{\alpha}\left[\rho\frac{dc^{\alpha}}{dt}M^{\alpha}-\rho R^{\alpha}M^{\alpha}-\left(j_i^{\alpha}-I_{ij,j}^{\alpha}\right)M_{,i}^{\alpha}\right]\geq 0,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

z której wynikają też warunki równowagi termodynamicznej. Ich określenie wymaga powolnego zanikania pól, decydujących o procesie termodynamicznym. Zachodzi wówczas:

$$
\frac{dT}{dt}\to 0\,,\quad d_{ij}\to 0\,,\quad \frac{d\eta_{ijk}}{dt}\to 0\,,\quad T_{,i}\to 0\,,\quad \frac{dc^{\alpha}}{dt}\to 0\,,\quad M_{,i}^{\alpha}\to 0\,,\quad R^{\alpha}\to 0\,. \tag{8}
$$

Z wyjściowej nierówności powstaje zależność:

$$
-\rho\frac{dA}{dt}\geq 0\,, \tag{9}
$$

z której wynika, że energia swobodna układu maleje, a w stanie równowagowym jest stała.

Podobnie jak poprzednio, poddamy analizie również warunki stabilności energetycznej układu. Określimy w tym celu wariację niezależnych pól w procesie termodynamicznym:

$$
\delta A\,,\ \ \delta T\,,\ \ \delta d_{ij}\,,\ \ \delta\eta_{ijk}\,,\ \ \delta T_{,i}\,,\ \ \delta c^{\alpha}\,,\ \ \delta M_{,i}^{\alpha}\,,\ \ \delta R^{\alpha}\,. \tag{10}
$$

Zgodnie z postępowaniem wynikającym z reguł rachunku wariacyjnego wyznaczamy wariacje pól występujących w nierówności rezydualnej traktowanej jako funkcjonał:

$$
\begin{aligned}
&-\rho\frac{d}{dt}\left(A+\alpha\,\delta A\right)-\rho\frac{d}{dt}\left(T+\alpha\,\delta T\right)s+\\
&+\sigma_{ij}\left(d_{ij}+\alpha\,\delta d_{ij}\right)-\tau_{ijk}\frac{d}{dt}\left(\eta_{ijk}+\alpha\,\delta\eta_{ijk}\right)-\left(q_i-Q_{ij,j}\right)\frac{1}{T}\left(T_{,i}+\alpha\,\delta T_{,i}\right)+\\
&+\sum_{\alpha}\left[\rho\frac{d}{dt}\left(c^{\alpha}+\alpha\,\delta c^{\alpha}\right)M^{\alpha}-\rho\left(R^{\alpha}+\alpha\,\delta R^{\alpha}\right)M^{\alpha}-\right.\\
&\left.-\left(j_i^{\alpha}-I_{ij,j}^{\alpha}\right)\left(M_{,i}^{\alpha}+\alpha\,\delta M_{,i}^{\alpha}\right)\right]\geq 0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Wariacje $\delta(\ldots)$ wyznacza się z granicy pochodnej powyższego wyrażenia $\lim_{\alpha\to 0}(d(\ldots)/d\alpha)$. Wtedy

$$
\begin{aligned}
&-\rho\,\delta\left(\frac{dA}{dt}\right)+\rho s\,\delta\left(\frac{dT}{dt}\right)+\sigma_{ij}\,\delta d_{ij}-\tau_{ijk}\,\delta\left(\frac{d\eta_{ijk}}{dt}\right)-\left(q_i-Q_{ij,j}\right)\frac{1}{T}\,\delta T_{,i}+\\
&+\sum_{\alpha}\left[\rho\,\delta\left(\frac{dc^{\alpha}}{dt}\right)M^{\alpha}-\rho\,\delta R^{\alpha}M^{\alpha}-\left(j_i^{\alpha}-I_{ij,j}^{\alpha}\right)\delta M_{,i}^{\alpha}\right]\geq 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Nierówność ta określa warunki stabilnego narastania niezależnych pól w procesie, czyli odkształceń i ich gradientów, temperatur wraz z ich gradientami oraz stężeń i gradientów potencjałów chemicznych.

3. Podsumowanie

Przedstawione w pracy rozważania dotyczące energetyki procesów termomechanicznych w teoriach gradientowych, a w tym stabilności energetycznej, odnoszą się do zasadniczych zagadnień tej teorii. Wynika z nich, że wiele rezultatów znanych z klasycznej termomechaniki ośrodków sprężystych i lepkosprężystych ma swoje odpowiedniki w teorii gradientowej. W szczególności widoczne są podobieństwa obu teorii w zakresie czysto mechanicznym i w teoriach naprężeń dystorsyjnych. Z analizy nierówności rezydualnej procesów termomechaniki gradientowej wynikają również formy bilansów procesu, a głównie rozszerzona postać bilansu pędu teorii gradientowej w stosunku do ujęcia klasycznego.

Oznaczenia symboli

c^α – stężenie masowe składnika α, mass concentration of constituent α, [kg/kg],
d_{ij} – składowa tensora prędkości odkształceń, component of strain rate tensor, [s^{-1}],
q_i – składowa wektora gęstości strumienia ciepła, component of heat flux vector, [W/m^2]
s – entropia na jednostkę masy, entropy per mass unit, [J/(K·kg)],
t – czas, time, [s],
u – energia wewnętrzna na jednostkę masy, internal energy per mass unit, [J/kg],
A – energia swobodna na jednostkę masy, free energy per mass unit, [J/kg],
$I^\alpha_{ij,j}$ – składowa gradientowa wektora gęstości strumienia masy składnika α, gradient component of mass flux vector of constituent α, [$kg/(s{\cdot}m^2)$],
M^α – potencjał chemiczny składnika α na jednostkę masy, chemical potential of constituent α per mass unit, [J/kg],
$Q_{ij,j}$ – składowa gradientowa wektora gęstości strumienia ciepła, gradient component of heat flux vector, [W/m^2],
R^α – źródło masy składnika α na jednostkę masy, mass source of constituent α per mass unit, [kg/(s·kg)],
T – temperatura, temperature, [K],
α – indeks składnika ciała, index of constituent of a body,
$\delta(\ldots)$ – wariacja, variation,
η_{ijk} – składowa tensora gradientów odkształceń, component of strain gradient tensor, [m^{-1}],
ρ – gęstość masy, mass density, [kg/m^3],
σ_{ij} – składowa tensora naprężeń, component of stress tensor, [Pa],
τ_{ijk} – składowa tensora naprężeń gradientowych, component of gradient stress tensor, [Pa·m],
$(\ldots)_{,i}$ – pochodna cząstkowa po zmiennej przestrzennej x_i (i=1,2,3), partial derivative of the spatial variable x_i (i=1,2,3).

Literatura

[1] Biot M.: Variational principles in heat transfer, Oxford University Press, London, 1964.
[2] Michlin S.G.: Variacionnyje metody w matematićeskoj fizyke, Nauka, Moskwa, 1970.
[3] Tatarkiewicz K.: Rachunek wariacyjny, T. 1 i 2, WNT, Warszawa, 1970.
[4] Vajnberg M.M.: Methods for the study of non-linear operators, San Francisco, Holden Day, 1964.
[5] Tonti E.: Variational principles in elastostatics, Meccanica, 2, 4, 1967.
[6] Kubik J.: Termomechanika gradientowa, OW PO, Opole, 2015.

ANALYSIS OF RESIDUAL INEQUALITY IN THE GRADIENT THERMOMECHANICS

Summary

In the work properties of the residual inequality of gradient thermomechanics are analysed. As a basic result of the considerations limitations of stability for the thermomechanical processes and for its evolution to the states of equilibrium are obtained using the methods of calculs of variations.