ROCZNIKI INŻYNIERII BUDOWLANEJ – ZESZYT 15/2015
Komisja Inżynierii Budowlanej Oddział Polskiej Akademii Nauk w Katowicach

UWAGI O BILANSIE MASY I PĘDU W GRADIENTOWEJ TERMOMECHANICE

Jan KUBIK
Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Opolska, Opole, Polska

Słowa kluczowe: *termomechanika gradientowa, bilans masy, bilans pędu.*

1. Wstęp

Z analizy energetycznej teorii gradientowej wynika postać bilansu pędu w tej teorii, która jest odmienna od klasycznej (np. [1-3]). Istotnie, zakładając *addytywność mocy mechanicznej pochodzącej od klasycznych i gradientowych naprężeń* wyprowadzimy równania zasady zachowania pędu tej teorii. Podobnie postąpimy z bilansami dyfundującej w ośrodku masy. Wyjściowym punktem rozważań jest klasyczny bilans energii mechanicznej

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(U+K)\,dV = \int_V \rho F_i\, v_i\, dV + \int_S P_i\, v_i\, dS, \tag{1}$$

który równoważnie może być przedstawiony w postaci

$$\int_V \sigma_{ij}\, v_{i,j}\, dV = \int_V \rho(\dot{v}_i - F_i)v_i\, dV + \int_S P_i\, v_i\, dS\ , \tag{1'}$$

a także wynikająca stąd zasada prac przygotowanych

$$\int_V \sigma_{ij}\, \delta v_{i,j}\, dV = \int_V \rho(\dot{v}_i - F_i)\delta v_i\, dV + \int_S P_i\, \delta v_i\, dS\ . \tag{1''}$$

Analogiczne bilanse w teorii gradientowej mają postać (por. [2,3])

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(U+K)\,dV = \int_V \rho F_i\, v_i\, dV + \int_S \tilde{P}_i\, v_i\, dS \tag{2}$$

oraz

$$\int_V \left(\sigma_{ij} v_{i,j} + \tau_{ijk} v_{i,jk}\right) dV = \int_V \rho(F_i - \dot{v}_i)v_i\, dV + \int_S \tilde{P}_i\, v_i\, dS\ . \tag{2'}$$

Natomiast zasada prac wirtualnych przyjmuje formę

$$\int_V \left(\sigma_{ij}\, \delta v_{i,j} + \tau_{ijk}\, \delta v_{i,jk}\right) dV = \int_V \rho\left(F_i - \dot{v}_i\right)\delta v_i\, dV + \int_S \widetilde{P}_i\, \delta v_i\, dS\,. \tag{2''}$$

2. Moc mechaniczna teorii gradientowej

Przyjmując, że energia wewnętrzna u, występująca w bilansie energii, a dalej w nierówności rezydualnej jest sumą energii pochodzącej od tensorów prędkości odkształceń i jej gradientu, uzyskamy możliwość podania równań ruchu, a dalej bilansu pędu teorii gradientowej.

Wyjściowym punktem rozważań jest moc mechaniczna w teorii gradientowej i jej wariacja (por. [3])

$$\rho\, \delta\widetilde{U} = \sigma_{ij}\, \delta v_{i,j} + \tau_{ijk}\, \delta v_{ij,k}\,, \tag{3}$$

którą scałkujemy po objętości ośrodka

$$\begin{aligned} \int_V \rho\, \delta\widetilde{U}\, dV &= \int_V \left(\sigma_{ij}\, \delta v_{i,j} + \tau_{ijk}\, \delta v_{i,jk}\right) dV = \\ &= \int_V \left[\left(\sigma_{ij}\, \delta v_i\right)_{,j} - \sigma_{ij,j}\, \delta v_i + \left(\tau_{ijk}\, \delta v_{i,j}\right)_{,k} - \tau_{ijk,k}\, \delta v_{i,j}\right] dV = \\ &= \int_S \left(\sigma_{ij} - \tau_{ijk,k}\right) n_j\, \delta v_i\, dS - \int_V \left(\sigma_{ij} - \tau_{ijk,k}\right)_{,j} \delta v_i\, dV + \\ &\quad + \int_S \tau_{ijk}\, n_j\, n_k\, \delta v_i\, dS - \int_S \tau_{ijk,j}\, n_k\, \delta v_i\, dS\,. \end{aligned} \tag{4}$$

W wyniku przekształceń otrzymaliśmy wyrażenie na wariację mocy mechanicznej teorii gradientowej. Otrzymane wyrażenie porównamy z klasycznym ujęciem zasady mocy wirtualnych. Z porównania tego otrzymamy rozszerzoną postać zasady zachowania pędu w teorii gradientowej.

3. Zasada prac wirtualnych

Porównując równania (2") i (4) otrzymamy

$$\begin{aligned} &\int_S \left[\widetilde{P}_i - \left(\sigma_{ij} - \tau_{ijk,k}\right) n_j - \tau_{ijk}\, n_j\, n_k + \tau_{ijk,j}\, n_k\right] \delta v_i\, dS + \\ &\quad + \int_V \left[\left(\sigma_{ij} - \tau_{ijk,k}\right)_{,j} + \rho\left(F_i - \dot{v}_i\right)\right] \delta v_i\, dV = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Równania Lagrange'a funkcjonału (5) mają postać:

$$\left(\sigma_{ij} - \tau_{ijk,k}\right)_{,j} + \rho\left(F_i - \dot{v}_i\right) = 0\,, \tag{6}$$

$$\widetilde{P}_i\Big|_S = \left(\sigma_{ij} - \tau_{ijk,k}\right) n_j + \tau_{ijk}\, n_j\, n_k - \tau_{ijk,j}\, n_k\,. \tag{7}$$

Równanie (6) określa równania ruchu w teorii gradientowej, a zależność (7) warunki brzegowe.

4. Energia przepływów dyfuzyjnych

Przedstawimy obecnie bilanse energii wynikające z przepływów dyfuzyjnych w ośrodku (por. [3]). Podstawą rozważań są tu parcjalne bilanse masy dla składnika α, które przemnożymy przez potencjał chemiczny M^{α} i scałkujemy po objętości ośrodka. Wówczas otrzymamy

$$\int_V \left[\rho \frac{dc^{\alpha}}{dt} + \left(j_i^{\alpha} - I_{ij,j}^{\alpha} \right)_{,i} - \rho R^{\alpha} \right] M^{\alpha} dV = 0 . \tag{8}$$

Analizując moc związaną z gęstościami strumieni masy j_i^{α} i $J_{ij,j}^{\alpha}$ uzyskamy

$$\int_V \rho \left(\frac{dc^{\alpha}}{dt} - R^{\alpha} \right) M^{\alpha}\, dV = -\int_S \left(j_i^{\alpha} - I_{ij,j}^{\alpha} \right) M^{\alpha}\, n_i\, dS + \int_V \left(j_i^{\alpha} - I_{ij,j}^{\alpha} \right) M_{,i}^{\alpha}\, dV . \tag{9}$$

Występująca po prawej stronie wyrażenia (9) całka może być przekształcona do postaci

$$\int_V \left(j_i^{\alpha} - I_{ij,j}^{\alpha} \right) M_{,i}^{\alpha}\, dV = \int_V \left[j_i^{\alpha} M_{,i}^{\alpha} - \left(I_{ij}^{\alpha} M_{,i}^{\alpha} \right)_{,j} + I_{ij}^{\alpha} M_{,ij}^{\alpha} \right] dV . \tag{10}$$

Ostatecznie bilans energii przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \int_V \rho \left(\frac{dc^{\alpha}}{dt} - R^{\alpha} \right) M^{\alpha}\, dV = -\int_S \left(j_i^{\alpha} - I_{ij,j}^{\alpha} \right) M^{\alpha}\, n_i\, dS - \int_S I_{ij}^{\alpha}\, M_{,i}^{\alpha}\, n_j\, dS + \\ + \int_V \left(j_i^{\alpha} M_{,i}^{\alpha} + I_{ij}^{\alpha} M_{,ij}^{\alpha} \right) dV. \end{aligned} \tag{11}$$

Z zależności (11) wynika funkcjonał

$$J\left(M^{\alpha}\right) = \int_V \rho \left(\frac{dc^{\alpha}}{dt} - R^{\alpha} \right) M^{\alpha} dV + \int_S \left(j_i^{\alpha} - I_{ij,j}^{\alpha} \right) M^{\alpha}\, n_i\, dS - \int_V \left(j_i^{\alpha} - I_{ij,j}^{\alpha} \right) M_{,i}^{\alpha}\, dV , \tag{12}$$

którego wariacja ma postać

$$\delta J(M^{\alpha}) = \int_V \rho \left(\frac{dc^{\alpha}}{dt} - R^{\alpha} \right) \delta M^{\alpha}\, dV + \int_S \left(j_i^{\alpha} - I_{ij,j}^{\alpha} \right) \delta M^{\alpha}\, n_i\, dS - \int_V \left(j_i^{\alpha} - I_{ij,j}^{\alpha} \right) \delta M_{,j}^{\alpha}\, dV. \tag{13}$$

Stąd dla $\delta J(M^{\alpha}) = 0$

$$\int_V \left[\rho\left(\frac{dc^\alpha}{dt} - R^\alpha \right) + \left(j_i^\alpha - I_{ij,j}^\alpha \right)_{,j} \right] \delta M^\alpha dV + \int_S \left(\hat{I}_i^\alpha - I_i^\alpha \right) \delta M^\alpha n_i \, dS = 0 \,. \tag{14}$$

Równanie Eulera-Lagrange'a funkcjonału $J(M^\alpha)$ to równanie bilansów składnika α oraz warunki brzegowe na wektor gęstości strumienia masy $I_i^\alpha = j_i^\alpha - I_{ij,j}^\alpha$ w teorii gradientowej:

$$\rho\left(\frac{dc^\alpha}{dt} - R^\alpha \right) + \left(j_i^\alpha - I_{ij,j}^\alpha \right)_{,j} = 0 \,, \tag{15}$$

$$\left(\hat{I}_i^\alpha - I_i^\alpha \right) n_i = 0 \,. \tag{16}$$

Oznaczenia symboli

K – energia kinetyczna na jednostkę masy, kinetic energy per mass unit, [J/kg],
n_i – składowa jednostkowego wektora normalnego do powierzchni S, component of unit vector normal to surface S, [-],
t – czas, time, [s],
U, $\tilde{U}$ – energia wewnętrzna na jednostkę masy odpowiednio w teorii klasycznej i gradientowej, internal energy per mass unit in the classic and gradient theory respectively, [J/kg],
v_i – składowa wektora prędkości, component of velocity vector, [m/s],
$I_{ij,j}^\alpha$ – składowa gradientowa wektora gęstości strumienia masy składnika α, gradient component of mass flux vector of constituent α, [kg/(s·m^2)],
M^α – potencjał chemiczny składnika α na jednostkę masy, chemical potential of constituent α per mass unit, [J/kg],
P_i, $\tilde{P}_i$ – składowa wektora obciążenia powierzchni S odpowiednio w teorii klasycznej i gradientowej, component of surface load vector in the classic and gradient theory respectively, [Pa],
R^α – źródło masy składnika α na jednostkę masy, mass source of constituent α per mass unit, [kg/(s·kg)],
S – powierzchnia ograniczająca obszar V, surface restricting area V, [m^2],
V – obszar zajmowany przez ciało, area occupied by a body, [m^3],
α – indeks składnika ciała, index of constituent of a body,
$\delta(...)$ – wariacja, variation,
η_{ijk} – składowa tensora gradientów odkształceń, component of strain gradient tensor, [m^{-1}],
ρ – gęstość masy, mass density, [kg/m^3],
ρF_i – siła masowa, mass force, [N/m^3],
σ_{ij} – składowa tensora naprężeń, component of stress tensor, [Pa],
τ_{ijk} – składowa tensora naprężeń gradientowych, component of gradient stress tensor, [Pa·m],

$(...)_{,i}$ – pochodna cząstkowa po zmiennej przestrzennej x_i (i=1,2,3), partial derivative of spatial variable x_i (i=1,2,3).

Literatura

[1] Aifontis E.C.: Update on class of gradient theories, Mech. Mat., 35, 2003, pp. 259-280.
[2] Kubik J.: Variational theorem of the gradient viscoelascity, 5th Int. Conf. „New trends in Statics and Dynamics of Buildings", Bratislava, 2008.
[3] Kubik J.: Termomechanika gradientowa, OW Pol. Opolskiej, Opole, 2015.

NOTES ON THE MASS AND MOMENTUM BALANCES IN THE GRADIENT THERMOMECHANICS

Summary

In the work energy of mechanical and diffusive transformations is analysed in terms of the gradient thermomechanics and calculus of variations. As a result of the considerations new forms of the partial diffusing mass and momentum balances of the thermomechanical process are derived in comparison with the classical theory.