

SZACOWANIE WŁAŚCIWOŚCI REOLOGICZNYCH DREWNA NA PODSTAWIE BADAŃ ULTRADŹWIĘKOWYCH

Kamil PAWLIK

Politechnika Opolska, Wydział Budownictwa i Architektury, Opole, Polska

1. Wstęp

Drewno jako materiał konstrukcyjny przeżywa ponownie swój renesans. Ważne jest więc stworzenie metody, która pozwalałaby w miarę szybko określać jego właściwości mechaniczne, a w tym reologiczne. Ich znajomość potrzebna jest inżynierom wykonującym obliczenia wytrzymałościowe konstrukcji drewnianych. Pomocne mogą się tu okazać badania ultradźwiękowe, które w porównaniu z niszczącymi badaniami statycznymi są zdecydowanie szybsze. Tematyka ta podejmowana była już w wielu pracach (np. [1,2,6]), ale wyznaczane były tam tylko parametry sprężyste. W konstrukcjach drewnianych na ugięcia mają wpływ procesy pelzania, ważne jest więc poznanie także parametrów reologicznych badanego materiału. Do identyfikacji poszukiwanych parametrów niezbędne jest jednak stworzenie odpowiedniego modelu matematycznego. Próba szacowania właściwości reologicznych na podstawie badań dynamicznych podjęta została w pracy [7], ale opierała się ona na badaniach drgań wspornika drewnianego.

W niniejszej pracy przedstawiono model obliczeniowy bazujący na równaniu tłumionej fali podłużnej, który otrzymano na drodze rozważań przemieszczeń w ośrodku opisywanym modelem Kelvina-Voigta [3,5,8]. Przeprowadzone badania ultradźwiękowe próbek drewnianych pozwoliły na podstawie przedstawionego modelu matematycznego oszacować wartości modułu sprężystości podłużnej i współczynnik lepkości drewna w przypadku modelu Kelvina-Voigta. Otrzymane wyniki porównano z wartościami parametrów wyznaczonych w pracy [7].

2. Równanie fali podłużnej w przypadku modelu Kelvina-Voigta

Niniejsze rozważania rozpoczniemy od przedstawienia w celach poglądowych wyprowadzenia równania fali podłużnej w przypadku modelu Kelvina-Voigta. Podobne rozważania, na podstawie teorii sprężystości i innych modeli ciał odkształcalnych [3,5], przedstawione zostały m.in. w pracy [8]. Równanie to posłuży nam do określenia związków pomiędzy prędkością rozchodzenia się fal i ich tłumienia a właściwościami reologicznymi materiału, w którym fale się propagują.

Równania równowagi i równania geometryczne mają kolejno postać [5]

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2)$$

Równania fizyczne ośrodka ortotropowego (drewno) w przypadku modelu Kelvina-Voigta przyjmą formę [3]

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \eta_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}. \quad (3)$$

Przy założeniu liniowej zależności między właściwościami sprężystymi i lepкими [7]

$$\eta_{ijkl} = \alpha E_{ijkl}, \quad (4)$$

równanie (3) będzie mieć postać

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} (\varepsilon_{kl} + \alpha \dot{\varepsilon}_{kl}). \quad (5)$$

Uwzględniając zapisy (2) i (5) w relacji (1) otrzymamy układ trzech równań

$$\frac{1}{2} E_{ijkl} [u_{k,lj} + u_{l,kj} + \alpha (\dot{u}_{k,lj} + \dot{u}_{l,kj})] + \rho F_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (6)$$

W przypadku fali podłużnej propagującej się tylko w kierunku x_1 i przy założeniach, że

$$u_1 = u_1(x_1, t), \quad u_2 = u_3 = 0, \quad \rho F_i = 0, \quad (7)$$

z (6) otrzymamy równanie

$$E_{1111} [u_{1,11} + \alpha \dot{u}_{1,11}] = \rho \ddot{u}_1, \quad (8)$$

gdzie

$$E_{1111} = E_1 \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{1 - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}} = E_1 \cdot \gamma. \quad (9)$$

Rozwiązaniem (8) jest równanie podłużnej fali tłumionej w postaci

$$u_1(x_1, t) = A \exp(-p \cdot k \cdot x_1) \cdot \exp(i(r \cdot k \cdot x_1 - \omega \cdot t)) = A \exp(i((r + p i)k \cdot x_1 - \omega \cdot t)), \quad (10)$$

gdzie $k = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{v_{\parallel 0}}$.

Poszukiwane pole przemieszczeń stanowi część rzeczywistą przedstawionego rozwiązania

$$u_1(x_1, t) = A \exp(-p k \cdot x_1) \cdot \cos(r k \cdot x_1 - \omega \cdot t). \quad (11)$$

Podstawiając (10) do (8), po przekształceniach otrzymamy wyrażenia na parametry p i r , a ostatecznie wzory na prędkość fali tłumionej v_{\parallel} i współczynnik $\beta = p \cdot k$, który określa jej tłumienie w postaci

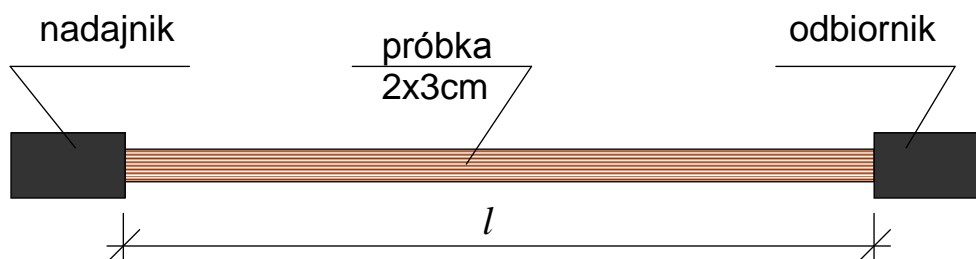
$$r \cdot k = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2\omega^2}+1}{2(1+\alpha^2\omega^2)}} \frac{\omega}{v_{\parallel 0}} = \frac{\omega}{v_{\parallel}} \rightarrow v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2(1+\alpha^2\omega^2)}{\sqrt{1+\alpha^2\omega^2}+1}} v_{\parallel 0}, \quad (12)$$

$$\beta = p \cdot k = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2\omega^2}-1}{2(1+\alpha^2\omega^2)}} \frac{\omega}{v_{\parallel 0}} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2\omega^2}-1}{2(1+\alpha^2\omega^2)}} \omega \sqrt{\frac{\rho}{E_1 \cdot \gamma}}. \quad (13)$$

Na podstawie wyników badań propagacji fal ultradźwiękowych (przedstawionych w kolejnym punkcie), przy wykorzystaniu równań (4), (12) i (13), można wyznaczyć parametry reologiczne modelu Kelvina-Voigta, tj. moduł sprężystości podłużnej E_1 oraz współczynnik lepkości η_1 .

3. Badania propagacji fal ultradźwiękowych

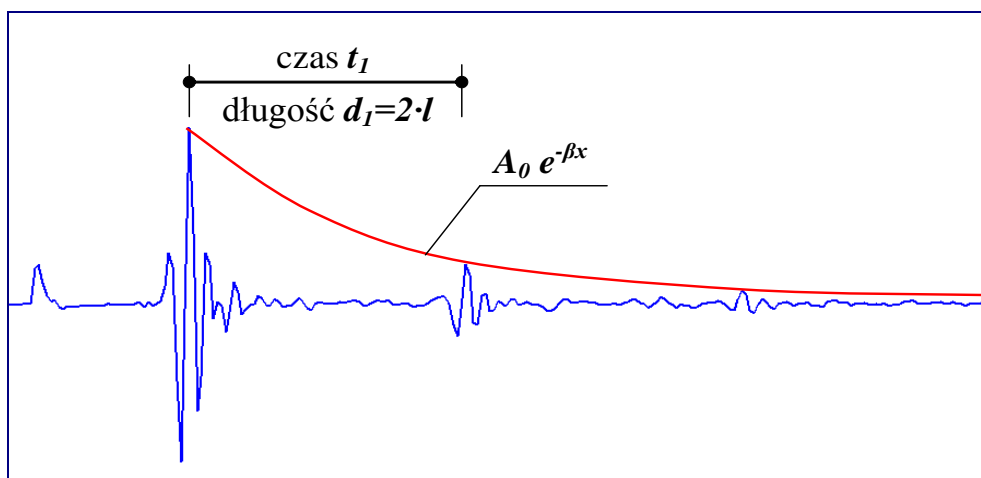
Badania propagacji fal ultradźwiękowych wykonywane zostało za pomocą betonoskopu. Testom podlegały pręty drewniane o wymiarach przekroju poprzecznego 2 cm x 3 cm. Do jednego końca próbki przyłożony był nadajnik, a do drugiego odbiornik. Schemat stanowiska przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Schemat stanowiska pomiarowego

Fig. 1. The scheme of measuring stand

Fale były propagowane z częstotliwościami 61,7 kHz i 500 kHz. Przykładowy wykres odczytanego sygnału w przypadku częstotliwości 500 kHz zamieszczono na rys. 2.



Rys. 2. Przykładowy wykres odczytu sygnału
Fig. 2. The exemplary diagram of signal reading

Na podstawie odczytanych sygnałów wyliczono prędkość propagującej się fali oraz jej tłumienie. Znając te wartości na podstawie wzoru (13), powinno być możliwe wyznaczenie współczynnika α , który posłuży do określenia współczynnika lepkości. Niestety, jak pokazują wyniki przedstawione w tabelicy 1, za każdym razem z pomiaru otrzymuje się bardzo zróżnicowane wartości tłumienia. Wynika to z faktu, że fala wytłumia się także przy odbiciu od końców pręta, przechodząc częściowo do nadajnika i odbiornika sygnału. Bardzo trudno jest zachować te same warunki brzegowe podczas kolejnych badań, a to uniemożliwia odseparowanie części tłumienia związanego z lepkością ośrodka od części związanej z „wyciekaniem” energii na brzegach próbki.

Tabela 1. Wartości współczynnika β przy częstotliwości 500kHz

Nr próbki	Długość l [m]	β [1/m]
1	0,1	7,01
2	0,1	8,24
3	0,1	5,94
4	0,05	6,29
5	0,05	10,74
6	0,05	14,37

Można jednak zauważyć, że prędkość rozchodzenia się fali (12) zależy nie tylko od częstotliwości, ale także od lepkości. Mając więc zmierzone prędkości propagacji fal w przypadku dwóch różnych częstotliwości możliwe jest wyznaczenie współczynnika α , który posłuży do wyznaczenia współczynnika lepkości.

Znając czas t_1 i długość odcinka d_1 (patrz rys. 1) można w prosty sposób wyznaczyć prędkość propagacji fali. Wyniki przedstawiono w tablicy 2.

Tablica 2. Prędkości propagacji fali w przypadku dwóch badanych częstotliwości

Częstotliwość [kHz]	Częstość [rad/s]	d_1 [m]	t_1 [μ s]	v_{\parallel} [m/s]	Średnie v_{\parallel} [m/s]
500	$\omega_1 \approx 3140000$	0,05	8,5	5882,4	$v_{\parallel 1} = 5882$
		0,1	17	5882,4	
61,7	$\omega_2 \approx 387600$	0,05	9,33	5359,1	$v_{\parallel 2} = 5360$
		0,1	18,65	5361,9	

Biorąc pod uwagę, że długość fali w przypadku częstotliwości 500kHz (ok. 1,2cm) jest mniejsza, a w przypadku częstotliwości 61,7kHz (ok. 8,7cm) większa od wymiarów przekroju próbki, stosunek poszczególnych prędkości zgodnie ze wzorem (12) ma postać

$$\frac{v_{\parallel 1}}{v_{\parallel 2}} = \frac{\sqrt{\frac{E_1 \cdot \gamma}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{2(1 + \alpha^2 \omega_1^2)}{\sqrt{1 + \alpha^2 \omega_1^2} + 1}}}{\sqrt{\frac{E_1}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{2(1 + \alpha^2 \omega_2^2)}{\sqrt{1 + \alpha^2 \omega_2^2} + 1}}} = \frac{\sqrt{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{2(1 + \alpha^2 \omega_1^2)}{\sqrt{1 + \alpha^2 \omega_1^2} + 1}}}{1 \cdot \sqrt{\frac{2(1 + \alpha^2 \omega_2^2)}{\sqrt{1 + \alpha^2 \omega_2^2} + 1}}} \quad (14)$$

Korzystając z wyników badań przedstawionych w pracy [4], wartość stałej γ wyznaczono jako równą 1,13. Znając więc prędkości rozchodzenia się fali w przypadku częstotliwości 61,7 kHz i 500 kHz wyznaczono ze wzoru (14) współczynnik α . Wynosi on

$$\alpha = 9,64 \cdot 10^{-8} \text{ [s]}. \quad (15)$$

Prędkość propagacji fali pozwala także wyznaczyć dynamiczny moduł sprężystości podłużnej. W przypadku prętów o wymiarach przekroju poprzecznego mniejszych od długości fali podłużnej, która propaguje wzdłuż jego osi, zachodzi relacja

$$v_{\parallel 0} = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}} \rightarrow E_1 = v_{\parallel 0}^2 \cdot \rho \rightarrow E_1 = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 \omega^2} + 1}{2(1 + \alpha^2 \omega^2)} v_{\parallel}^2 \cdot \rho. \quad (16)$$

W przypadku częstotliwości równej 61,7 kHz długość fali wynosi $\approx 8,7\text{cm} > 2\text{cm}$. Stąd, przy gęstości drewna wynoszącej 528 kg/m³, moduł sprężystości podłużnej będzie równy następującej wartości

$$E_1 = 15,17 \text{ [GPa]}. \quad (17)$$

Lepkość wynosi zatem

$$\eta_1 = \alpha \cdot E_1 = 1,46 [kPa \cdot s]. \quad (18)$$

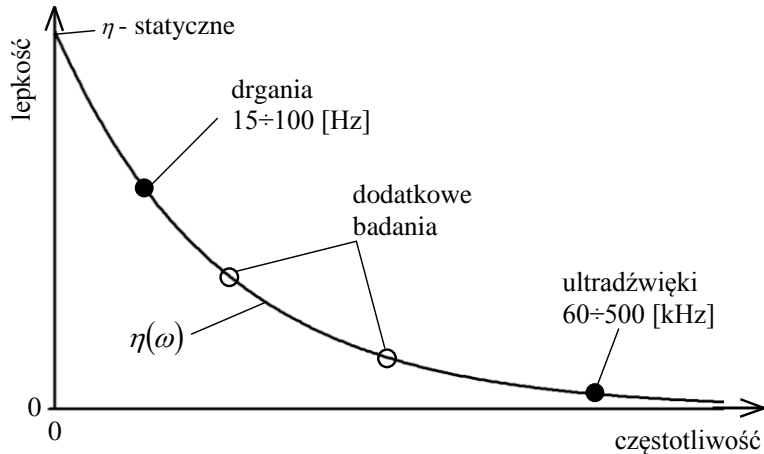
4. Analiza wyników

Próby oszacowania wartości parametrów reologicznych bazujących na badaniach dynamicznych podejmowane były także w pracy [7]. Opierały się one jednak na badaniach drgań tłumionych wspornika drewnianego. Porównajmy więc powyższe wyniki z wartościami otrzymanymi we wspomnianej pracy [7]. Próbki w obu badaniach były wykonane z tego samego drewna. Zestawienie wyników przedstawione zostały w tablicy 3.

Tablica 3. Porównanie wyników

Zakres częstotliwości	Moduł sprężystości podłużnej E_1 [GPa]	Współczynnik α [10^{-7} s]	Współczynnik lepkości η_1 [kPa·s]
15÷100 [Hz] – praca [4]	15,20	291	442,3
60÷500 [kHz]	15,17	0,96	1,46

Jak można zauważyć, moduł sprężystości podłużnej wyliczony obiema metodami jest prawie identyczny. Współczynnik lepkości różni się jednak i to znacznie. Jest to różnica dwóch rzędów i jego wartość jest większa w przypadku badań wykonywanych w niższych częstotliwościach. Można wyciągnąć stąd wniosek, że współczynnik lepkości drewna wg modelu Kelvina-Voigta jest silnie zależny od częstotliwości i maleje wraz z jej wzrostem.



Rys. 3. Wykres współczynnika lepkości w funkcji częstotliwości
Fig. 3. The graph of coefficient of viscosity as a function of frequency

Posiadając wyniki badań z większej ilości przedziałów częstotliwości, możliwe byłoby wyznaczenie funkcji $\eta_1(\omega)$ opisującej wartość współczynnika lepkości w zależności od

częstotliwości drgań ośrodka. To pozwoliłoby odnieść wartość współczynnika lepkości otrzymanego z badań dynamicznych do wartości współczynnika lepkości w przypadku obciążeń statycznych ($\omega \approx 0$). Idea ta przedstawiona została na rys. 3.

5. Podsumowanie i wnioski

Podsumowując można stwierdzić, że badania ultradźwiękowe umożliwiają wyznaczenie parametrów reologicznych badanych materiałów. Przedstawiona w pracy przyczynkowa analiza wyników wykazała jednak, że wartości poszukiwanych parametrów zależą od częstotliwości wykorzystywanych podczas badań. To wskazuje na potrzebę przeprowadzenia dodatkowych badań w innych przedziałach częstotliwości, co pozwoli określić zależność współczynnika lepkości od częstotliwości propagowanej fali.

Oznaczenia symboli

- σ_{ij} - składowa tensora naprężeń, stress tensor component, [Pa],
- ε_{ij} - składowa tensora odkształceń, strain tensor component, [-],
- u_i - składowa wektora przemieszczeń, displacement vector component, [m],
- E_1 - moduł sprężystości podłużnej drewna, modulus of longitudinal elasticity of wood, [Pa],
- E_{ijkl} - składowa tensora współczynników sprężystości, component of tensor of moduli of elasticity, [Pa],
- ν_{ij} - współczynniki Poissona, Poisson's ratios, [-],
- η_1 - współczynnik lepkości, coefficient of viscosity, [Pa·s],
- η_{ijkl} - składowa tensora współczynników lepkości, component of tensor of coefficients of viscosity, [Pa·s],
- k - liczba falowa, wave number, [1/m],
- ω - częstość kątowa, angular frequency, [rad/s],
- λ_0 - długość fali nietłumionej, length of undamped wave, [m],
- v_{\parallel} - prędkość fali tłumionej, velocity of damped wave, [m/s],
- $v_{\parallel 0}$ - prędkość fali nietłumionej, velocity of undamped wave, [m/s],
- $u_{i,i} = \partial u_i / \partial x_i$, $\dot{f} = df / dt$ - zapis pochodnych, notation of derivatives.

Literatura

- [1] Bucur V., An ultrasonic method for measuring the elastic constants of wood increment cores bored from living trees, *Ultrasonics*, 21, 116-126, 1983
- [2] Dackermann U., Elsener R., Li J., Crews K., A comparative study of using static and ultrasonic material testing methods to determine the anisotropic material properties of wood, *Construction and Building Materials*, 102, 963-976, 2006
- [3] Jakowluk A., *Procesy pełzania i zmęczenia w materiałach*, WNT, Warszawa, 1993.
- [4] Kozioł L., Zastępcze stałe materiałowe drewna konstrukcyjnego modyfikowanego powierzchniowo PMM, *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, Rok XLVI, 1, 160, 69-82, 2005
- [5] Nowacki W., *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa, 1970

- [6] Oliveira F. G. R., de Campos J. A. O., Pletz E., Sales A., Nondestructive evaluation of wood using ultrasonic techniques, *Maderas Ciencia y tecnología*, 4, 133-139, 2002
- [7] Pawlik K., Perkowski Z., Wpływ wilgotności na sztywnościowe tłumienie drgań konstrukcji drewnianych, *Roczniki Inżynierii Budowlanej, KIB PAN O/Katowice*, 13, 95-100, 2013
- [8] Perkowski Z., Gozarska K., Szacowanie czasu propagacji fal dźwiękowych w ośrodkach materialnych za pomocą metody Dijkstry, *Roczniki Inżynierii Budowlanej, KIB PAN O/Katowice*, 12, 43-48, 2012

ESTIMATION OF RHEOLOGICAL PROPERTIES OF WOOD BASED ON ULTRASONIC TESTS

Summary

A computational model based on the equation of damped longitudinal wave for the Kelvin-Voigt model (e.g. [8]) is presented in the paper. A results of ultrasonic tests of wooden samples are also presented. The presented mathematical model and the test results allowed estimating values of the modulus of elasticity and the viscosity coefficient of wood for the Kelvin-Voigt model. The results are compared with the values of the parameters determined in work [7].